МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Московский государственный
гуманитарно-экономический университет (МГГЭУ)

В.А. Кадымов, Р.Э. Ахмедов

ФУНКЦИЯ ОДНОЙ НЕЗАВИСИМОЙ ПЕРЕМЕННОЙ. ТЕОРИЯ ПРЕДЕЛОВ. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

Учебно-методическое пособие

Москва
2017

УДК 517
ББК 22.161
К 13

Рецензенты:

Уварова Л.А., д-р физ.-мат. наук, проф., зав. кафедрой прикладной математики ФГБОУ ВО МГТУ «СТАНКИН».

Яновская Е.А., канд. тех. наук, доцент кафедры.

Кадымов В.А., Ахмедов Р.Э.

К 13 Функция одной независимой переменной. Теория пределов. Дифференциальное исчисление: *учебно-методическое пособие*. – М.: МГГЭУ, 2017. – 76 с.

В учебном пособии в краткой форме представлен необходимый теоретический материал и разобраны методы решения задач по теории пределов и дифференциальному исчислению функции одной переменной.

Элементы теории сопровождаются примерами с подробными решениями. Приводятся тесты для закрепления теоретического и практического материалов. В заключительной части книги представлены варианты контрольных заданий для самостоятельной работы.

ISBN 978-5-9799-0104-6

1. Теория пределов

1.1. Предел последовательности и предел функции

Определение 1. Число b называется *пределом функции* $y = f(x)$ *в точке* $x = x_0$ (или пределом $f(x)$ при $x \to x_0$), если:

1) функция $y = f(x)$ определена в некоторой окрестности точки $x = x_0$, кроме, быть может, самой этой точки;
2) для любого сколь угодно малого числа $\varepsilon > 0$ существует такое, зависящее от ε число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что для всех x, удовлетворяющих условиям $0 < |x - x_0| < \delta$, выполняется неравенство $|f(x) - b| < \varepsilon$ или, что в силу свойств модуля, то же самое, для всех x, удовлетворяющих условиям $x_0 - \delta < x < x_0 + \delta$, $x \neq x_0$, выполняется неравенство: $b - \varepsilon < f(x) < b + \varepsilon$,

При этом используется обозначение:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = b \text{ или } f(x) \to b \text{ при } x \to x_0. \qquad (1.1)$$

Факту существования предела функции (1.1) можно дать следующую графическую интерпретацию (*рис. 1*). Какой бы малой ни была ε — окрестность точки b на оси ординат, всегда найдется такая δ — окрестность точки x_0 на оси абсцисс, что для всех x, попавших в нее (за исключением, быть может, самой точки x_0), точки $M(x,y)$ графика функции $y = f(x)$ лежат внутри полосы шириной 2ε, ограниченной прямыми $y = b - \varepsilon$ и $y = b + \varepsilon$.

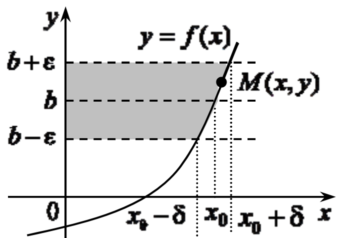

Рис. 1. К определению предела функции в точке

Чем меньше ширина этой полосы, тем, вообще говоря, у́же следует брать интервал $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$.

Важно подчеркнуть, что предел функции в точке $x = x_0$ и ее значение $y_0 = f(x_0)$ в этой точке — вещи разные и, более того, для существования предела $f(x)$ в точке $x = x_0$ совсем не обязательно, чтобы функция $f(x)$ вообще была в ней определена.

Пример 1. Проиллюстрируем сказанное на примере трёх функций:

$$f_1(x) = x + 2; \quad f_2(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}; \quad f_3(x) = \left[\begin{array}{l} x + 2,\ x \neq 2 \\ 1,\ x = 2 \end{array}\right..$$

Они отличаются друг от друга только в одной точке $x = 2,$ причем $f_2(x)$ определена для всех x кроме $x = 2,$ а $f_1(x)$ и $f_3(x)$ определены на всей числовой оси, но при этом $f_1(2) = 4,$ $f_3(2) = 1.$ Тем не менее, как видно из графиков этих функций (*рис. 2*), все они в точке $x = 2$ имеют один и тот же предел:

$\lim\limits_{x\to 2} f_1(x) = \lim\limits_{x\to 2} f_2(x) = \lim\limits_{x\to 2} f_3(x) = 4$ при том, что $\lim\limits_{x\to 2} f_1(x) = f_1(2);$ $\lim\limits_{x\to 2} f_3(x) \neq f_3(2);$ $f_2(2)$ — не существует.

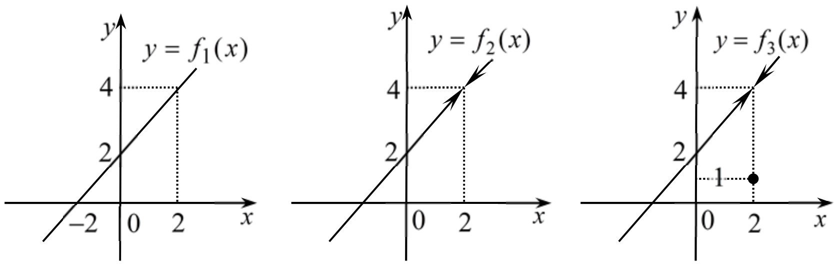

Рис. 2. К сравнению понятий предела функции и значения функции

Пример 2. Пользуясь определением 1, докажем, что $\lim\limits_{x\to 3} x^2 = 9.$

Решение. Зададимся произвольным $\varepsilon > 0,$ по которому будем подбирать $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что для каждого x, удовлетворяющего условию $0 < |x - 3| < \delta,$ будет выполняться неравенство $|x^2 - 9| < \varepsilon.$ Пусть $|x - 3| < \delta,$ в котором δ пока не определено. Тогда $|x^2 - 9| = |(x-3)(x+3)| =$ $= |(x-3)((x-3)+6)| \leq |x-3|(|x-3|+6) < \delta^2 + 6\delta.$

И если выберем δ так, чтобы $\delta^2 + 6\delta = \varepsilon,$ то условие $|x-3| < \delta$ $\Rightarrow |x^2 - 9| < \varepsilon$ будет выполнено. Иначе говоря, получаем, что $\lim\limits_{x\to 3} x^2 = 9.$

Остается только решить квадратное уравнение $\delta^2+6\delta-\varepsilon=0$ относительно δ и отобрать положительный корень: $\delta=3+\sqrt{9+\varepsilon}$.

Определение 2. Пусть функция $y=f(x)$ определена на некотором интервале $\left(x_0-a,x_0\right)$, где $a>0$. Число b_1 называется *пределом функции* $y=f(x)$ *при* $x\to x_0$ *слева*, если для любого сколь угодно малого числа $\varepsilon>0$ существует такое число $\delta=\delta(\varepsilon)>0$, что для всех x, удовлетворяющих условию $x_0-\delta<x<x_0$, выполняется неравенство $\left|f\left(x\right)-b_1\right|<\varepsilon$. При этом используется обозначение $x\to x_0-0$ (или $x\to x_0-$):

$$\lim_{x\to x_0-0} f(x)=b_1. \tag{1.2}$$

Аналогично вводится предел функции $y=f(x)$ при $x\to x_0$ справа:

$$\lim_{x\to x_0+0} f(x)=b_2. \tag{1.3}$$

Предел справа и слева называются *односторонними* пределами.

Необходимо отметить, что если в точке $x=x_0$ пределы $f\left(x\right)$ справа b_1 и слева b_1 существуют и равны между собой, то тогда в точке $x=x_0$ существует предел $f\left(x\right)$, причем

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=b=b_1=b_2. \tag{1.4}$$

Пример 3. $f(x)=\left[\begin{array}{l} x+3,\ x\ge 0 \\ x^2+1,\ x<0 \end{array}\right.$, $b_1=\lim\limits_{x\to 0-} f(x)=1$; $b_2=\lim\limits_{x\to 0+} f(x)=3$, при этом $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ — не существует.

Введем понятие предела $f(x)$ при $x\to\pm\infty$.

Пусть X — область определения функции $f(x)$.

Определение 3. Число b называется *пределом функции* $y=f(x)$ *при* $x\to+\infty$, если для любого сколь угодно малого $\varepsilon>0$ найдется такое, зависящее от ε, число $N=N(\varepsilon)$, что для всех x, удовлетворяющих условиям: $x>N$, $x\in X$, выполняется неравенство $|f(x)-b|<\varepsilon$. При этом используется обозначение:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = b \text{ или } f(x) \to b \text{ при } x \to +\infty. \qquad (1.5)$$

Совершенно аналогично определяется предел $f(x)$ при $x \to -\infty.$

Пример 4. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^x = 0;$ $\lim\limits_{x\to-\infty} 2^x = 0;$ $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right) = 1,$ что нетрудно видеть, исходя из графической интерпретации понятия предела и графиков этих функций. Исходя из этого же, видно, что предела функции $y = \sin x$ ни при $x \to +\infty,$ ни при $x \to -\infty$ не существует.

Рассмотрим важный частный случай функции — последовательность $y_n = f(n).$ Ее область определения $X = \{1, 2, 3...n...\}$ и, согласно общему определению предела функции, при $x \to +\infty,$ можно ввести соответствующее понятие отдельно для последовательности.

На основании графической интерпретации понятия предела, а также на основании самого определения функции, согласно которому каждому значению аргумента соответствует только одно значение функции, можно сделать важный вывод о том, что если предел $f(x)$ при $x \to x_0,$ $x_0 \pm 0,$ $\pm\infty$ (соответственно, предел последовательности y_n при $n \to \infty$) существует, то он единственный.

1.2. Бесконечно малая и бесконечно большая функции. Их свойства

Определение 4. Функция $y = f(x)$ называется *бесконечно малой* (б.м.) при $x \to x_0,$ если $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0.$

Пример 5.

а) $y = (x-1)^2$ — бесконечно малая при $x \to 1,$ поскольку $\lim\limits_{x\to 1}(x-1)^2 = 0.$

б) $y = \frac{1}{x}$ — бесконечно малая при $x \to \infty,$ т.к. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x} = 0.$

Пусть $y = f(x)$ определена в некоторой окрестности точки $x_0,$ кроме, возможно, самой точки x_0. при $y = f(x)$

Определение 5. Функция $f(x)$ называется *бесконечно большой* при $x \to x_0,$ если для любого сколь угодно большого числа $A > 0$ найдется такое, зависящее от A, число $\delta = \delta(A),$ что для всех x, удовлетворяющих условиям $0 < |x - x_0| < \delta,$ выполняется неравенство $|f(x)| > A$ (что означает либо $f(x) > A,$ либо $f(x) < -A).$

Такой факт записывается в форме

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty. \tag{1.6}$$

1. Если функция $y = f(x)$ представляется в виде суммы числа b и функции $\alpha(x),$ бесконечно малой при $x \to a,$ т.е. $y = f(x) = b + \alpha(x),$ то тогда $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b.$

   И обратно, если $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b,$ то $f(x)$ можно представить в виде суммы: $f(x) = b + \alpha(x),$ где $\alpha(x)$ — бесконечно малая при $x \to a.$
2. Если $\alpha(x)$ является бесконечно малой функцией при $x \to a$ и не обращается в ноль в некоторой окрестности точки $a,$ то тогда функция $y(x) = \dfrac{1}{\alpha(x)}$ — бесконечно большая при $x \to a.$

   И наоборот, если $y(x)$ — бесконечно большая при $x \to a.$ то $\alpha(x) = \dfrac{1}{y(x)}$ — бесконечно малая при $x \to a.$

   Например, $\alpha(x) = (x-1)^2 \to 0$ при $x \to 1,$ $y(x) = \dfrac{1}{\alpha(x)} = $ $= \dfrac{1}{(x-1)^2} \to +\infty$ при $x \to 1.$
3. Пусть при $x \to a$ $\alpha(x)$ — бесконечно малая, а $Z(x)$ — ограниченная функция. Тогда их произведение $\alpha(x) \cdot Z(x)$ есть бесконечно малая функция при $x \to a.$

Пример 6. Вычислите предел $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\sin x}{x}.$

Решение: $\alpha(x) = \dfrac{1}{x}$ — бесконечно малая при $x \to \infty,$ $Z(x) = \sin x$ — ограничена на $(-\infty, +\infty),$ а значит, и при $x \to \infty.$

Следовательно, $\dfrac{\sin x}{x} = \alpha(x) \cdot Z(x)$ — тоже бесконечно малая при $x \to \infty$, т.е. искомый предел равен нулю.

1.3. Основные теоремы о пределах. Первый и второй замечательные пределы. Сравнение бесконечно малых

Теорема 1. Предел суммы двух, трех и вообще любого конечного числа функций равен сумме пределов этих функций при условии, что каждый из них существует, т.е.

$$\lim_{x\to a}\left[u_1(x)+u_2(x)+\ldots+u_n(x)\right]=\lim_{x\to a}u_1(x)+\lim_{x\to a}u_2(x)+\ldots+\lim_{x\to a}u_n(x). \tag{1.7}$$

Пример 7. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(3+\dfrac{5}{x}+\dfrac{1}{x^2}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}3+\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5}{x}+\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x^2}=3+0+0=3.$

Теорема 2. Предел произведения двух, трех и вообще любого конечного числа функций равен произведению пределов этих функций при условии, что каждый из них существует, т.е.

$$\lim_{x\to a}\left[u_1(x)\cdot u_2(x)\cdot\ldots\cdot u_n(x)\right]=\lim_{x\to a}u_1(x)\cdot\lim_{x\to a}u_2(x)\cdot\ldots\cdot\lim_{x\to a}u_n(x). \tag{1.8}$$

Теорема 3. Предел частного двух функций равен частному пределов этих функций при условии, что каждый из них существует и предел знаменателя отличен от нуля:

$$\lim_{x\to a}\left(\frac{u(x)}{\upsilon(x)}\right)=\frac{\lim\limits_{x\to a}u(x)}{\lim\limits_{x\to a}\upsilon(x)} \text{ при } \lim_{x\to a}\upsilon(x)\neq 0. \tag{1.9}$$

Заметим, что все сформулированные теоремы справедливы и для последовательностей при $n\to\infty$ как для частного случая функций.

Пример 8. Вычислите $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-9}{x-3}$. Непосредственное применение теоремы о пределе частного невозможно, так как предел знаменателя равен нулю. Однако возможно преобразование: $\dfrac{x^2-9}{x-3}=\dfrac{(x-3)(x+3)}{x-3}=x+3$, причем сокращение допустимо, поскольку при вычислении предела сама точка $x=3$ не рассматривается. Таким образом, $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x^2-9}{x-3}=\lim\limits_{x\to3}(x+3)=3+3=6.$

Справедливо утверждение о том, что:

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=\left(\frac{0}{0}\right)=1. \tag{1.10}$$

Этот предел называется первым замечательным пределом.

Рассмотрим последовательность $y_n=\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$. Можно доказать, что она имеет предел, обозначаемый через *e*, который выражается бесконечной непериодической дробью:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=(1^\infty)=e=2{,}7182... \tag{1.11}$$

и называется вторым замечательным пределом.

Можно показать, что и для функции $y(x)=\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$, $x\in R$ справедливо:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e. \tag{1.12}$$

Если же в (2.20) сделать замену переменной $z=\dfrac{1}{x}$, то получим

$$\lim_{z\to0}(1+z)^{1/z}=e, \tag{1.13}$$

при этом строгое обоснование правомерности такой замены здесь приводить не будем.

Пример 9. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin5x}{3x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin5x}{5x}\cdot\dfrac{5}{3}=\lim\limits_{z\to0}\dfrac{\sin z}{z}\cdot\dfrac{5}{3}=\dfrac{5}{3}\cdot1=\dfrac{5}{3}$, при этом $z=5x\to0$ при $x\to0$.

Здесь и далее замена переменной строго не обосновывается, но она достаточно понятна и иногда процесс подобного рода можно не выписывать, а проводить в уме.

Пример 10. Вычислите $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2(1-\cos x)}{x^2}$.

Решение: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2(1-\cos x)}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\cdot 2\sin^2\dfrac{x}{2}}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\dfrac{x}{2}\cdot\sin\dfrac{x}{2}}{\dfrac{x}{2}\cdot\dfrac{x}{2}}=$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin\dfrac{x}{2}}{\dfrac{x}{2}}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin\dfrac{x}{2}}{\dfrac{x}{2}}=1\cdot 1=1.$$

Пример 11. Вычислите $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{3n+2}$.

Решение: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{3n+2}=\lim\limits_{n\to\infty}\left\{\left[\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n}\right]^{3}\cdot\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{2}\right\}=$

$$=\left[\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\right]^{3}\cdot\left[\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)\right]^{2}=e^3\cdot 1^2=e^3.$$

Пусть $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ — бесконечно малые функции при $x\to a$.

Определение 6. Функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называются *бесконечно малыми одного и того же порядка малости* при $x\to a$, если $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}$ существует и отличен от нуля.

Пример 12. $\alpha(x)=x-1$, $\beta(x)=(x-1)(x+1)$ — бесконечно малые одного порядка при $x\to 1$, т.к. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{(x-1)(x+1)}=\dfrac{1}{2}\neq 0$.

Определение 7. Функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называются *эквивалентными бесконечно малыми* при $x\to a$, если $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=1$.

Эквивалентность $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ обозначается символом $\alpha(x)\sim\beta(x)$ при $x\to a$. На основании приведенных выше примеров и согласно определению первого замечательного предела можно записать таблицу эквивалентности б.м. при $x\to 0$:

$$
\begin{array}{ll}
\sin x \sim x, & e^x - 1 \sim x, \\
tgx \sim x, & a^x - 1 \sim x \ln a, \\
\arcsin x \sim x, & \ln(1+x) \sim x, \\
\mathrm{arctg} x \sim x, & \log_a(1+x) \sim \dfrac{x}{\ln a}, \\
1 - \cos x \sim \dfrac{x^2}{2}, & (1+x)^m - 1 \sim mx, m \in R.
\end{array} \tag{1.14}
$$

Определение 8. Функция $\alpha(x)$ называется бесконечно малой более высокого порядка малости, чем $\beta(x)$ при $x \to a$, если $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0$ и более низкого порядка малости, чем $\beta(x)$ при $x \to a$, если $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \infty$;

$\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называются *несравнимыми бесконечно малыми при* $x \to a$, если $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}$ не существует.

Пример 13. $\alpha(x) = x^4$ более высокого порядка малости, чем $\beta(x) = x^2$ при $x \to 0$ и, соответственно, $\beta(x) = x^2$ более низкого порядка, чем $\alpha(x) = x^4$ при $x \to 0$, поскольку $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^4}{x^2} = 0$, $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^4}{x^2} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{x^2} = \infty$.

Пример 14. $\alpha(x) = \dfrac{\sin x}{x^2}$ и $\beta(x) = \dfrac{1}{x^2}$ — несравнимые бесконечно малые при $x \to \infty$, поскольку $\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \sin x$ при $x \to \infty$ предела не имеет.

Теорема 4. Пусть $\alpha(x) \sim \alpha_1(x)$, $\beta(x) \sim \beta_1(x)$ при $x \to a$ и $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}$ существует. Тогда существует предел отношения $\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}$, причем $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim\limits_{x \to a} \dfrac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}$.

Пример 15.

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\mathrm{tg}\, 11x}{\sin 5x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{11x}{5x} = \dfrac{11}{5}$, т.к. $\mathrm{tg}\, 11x \sim 11x$, $\sin 5x \sim 5x$, при $x \to 0$.

1.4. Непрерывность функции в точке. Разрывная функция. Классификация точек разрыва. Теоремы о непрерывных функциях

Определение 9. Функция $y = f(x)$ называется *непрерывной в точке* $x = x_0$, если:

1) $f(x)$ определена в точке $x = x_0$ и в некоторой ее окрестности;
2) Существует предел $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$;
3) Этот предел равен значению функции в точке x_0:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f\left(x_0\right). \tag{1.15}$$

Пример 16. Функция $y = x^2$ непрерывна в точке $x = 0$, поскольку $\lim\limits_{x \to x_0} x^2 = 0$ и $y(0) = 0^2 = 0$ (т.е. выполняются условия (1)–(3) непрерывности).

Пример 17. Функция $y = \begin{cases} \sin x, x \neq 0 \\ 1, \; x = 0 \end{cases}$ не является непрерывной в точке $x = 0$, так как не выполняется третье условие в определении непрерывности.

Определение 10. Пусть $f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0, кроме, возможно, самой этой точки. Точка x_0 называется *точкой разрыва функции* $f(x)$, если в ней нарушается хотя бы одно из условий непрерывности функции, т.е. либо значение $f\left(x_0\right)$ не определено, либо не существует $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$, либо этот предел не равен $f\left(x_0\right)$.

Определение 11. Пусть x_0 — точка разрыва функции $f(x)$. Если существуют конечные пределы справа и слева:

$\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = b_1$, $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = b_2$, то x_0 называется *точкой разрыва первого рода.*

Заметим, что при этом значение $f\left(x_0\right)$ либо не определено, либо не все три числа $b_1, b_2, f\left(x_0\right)$ равны между собой.

Если x_0 — точка разрыва первого рода и при этом $b_1 = b_2$, то x_0 называется точкой устранимого разрыва функции $f(x)$. Подчеркнем, что для непрерывности $f(x)$ в точке x_0 необходимо и достаточно, чтобы:

$$f(x_0) = \lim_{x \to x_0+0} f(x) = \lim_{x \to x_0-0} f(x). \qquad (1.16)$$

Пример 18. Функция $y = f(x) = \dfrac{x}{|x|}$ имеет в точке $x = 0$ разрыв первого рода, поскольку $\dfrac{x}{|x|} = \left[\begin{array}{l} 1,\ x > 0 \\ -1,\ x < 0 \end{array}\right.$, т.е. $\lim\limits_{x \to x_0+} f(x) = 1$, $\lim\limits_{x \to x_0-} f(x) = -1$.

Пример 19. Функция $y = \dfrac{\operatorname{tg} x}{x}$ в точке $x = 0$ имеет устранимый разрыв, поскольку значение $y(0)$ не определено и при этом $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{tg} x}{x} = \lim\limits_{x \to 0+} \dfrac{\operatorname{tg} x}{x} = \lim\limits_{x \to 0-} \dfrac{\operatorname{tg} x}{x} = 1$. Если доопределить данную функцию в точке $x = 0$, приняв $y(0) = 1$, то получим непрерывную функцию.

Определение 12. Точки разрыва функции, не являющиеся точками разрыва первого рода, называются *точками разрыва второго рода.*

К ним относятся точки, в которых левый или правый пределы $f(x)$ не существуют и, в частности, какой-либо из них равен $\pm\infty$ (в последнем случае точка x_0 называется точкой бесконечного разрыва).

Пример 20. Функция $y = \dfrac{1}{x}$ в точке $x = 0$ имеет разрыв второго рода (бесконечный разрыв).

Теорема 5. Пусть функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ непрерывны в точке $x = x_0$, тогда их сумма $f(x) + \varphi(x)$ и произведение $f(x) \cdot \varphi(x)$ непрерывны в точке $x = x_0$. Если, кроме того, $\varphi(x_0) \neq 0$, то их частное $\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}$ также непрерывно в этой точке.

Теорема 6. Пусть функция $u = \varphi(x)$ непрерывна в точке $x = x_0$, а функция $y = f(u)$ непрерывна в точке $u_0 = \varphi(x_0)$, тогда сложная функция $y = f(\varphi(x))$ непрерывна в точке $x = x_0$.

Эти две теоремы приводят к важному **следствию**: всякая элементарная функция непрерывна в своей области определения.

Такое утверждение дает возможность при вычислении предела элементарной функции $f(x)$ при $x \to x_0$ в случае, когда эта функция определена в точке $x = x_0$, воспользоваться формулой

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f\left(\lim_{x\to x_0} x\right) = f\left(x_0\right). \tag{1.17}$$

Пример 21. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} 2^{\sin x} = 2^{\sin\frac{\pi}{2}} = 2^1 = 2,$ поскольку функция $2^{\sin x}$ непрерывна.

Пример 22. Вычислите $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}$ (здесь имеет место неопределенность типа $\dfrac{0}{0}$).

Решение. $\dfrac{\ln(1+x)}{x} = \ln\left[(1+x)^{\frac{1}{x}}\right]$ и поскольку функция $\ln z$ непрерывна при $z>0$ и $\left(1+x\right)^{\frac{1}{x}} \to e$ при $x\to 0$, то $\lim\limits_{x\to 0}\ln\left[(1+x)^{\frac{1}{x}}\right] =$ $= \ln\left[\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}\right] = \ln e = 1.$ Вывод: при $x\to 0,$ $\ln(1+x)\sim x.$

2. Элементы дифференциального исчисления

2.1. Производная, ее физический и геометрический смысл. Дифференциал функции

Пусть функция $y = f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0. Рассмотрим значения этой функции в двух близлежащих точках: исходной (фиксированной) $x = x_0$ и новой (переменной) $x = x_1$ такой, что отрезок $\left[x_0, x_1\right]$ (или отрезок $\left[x_1, x_0\right]$, если $x_1 < x_0$) целиком лежит в области определения $f(x)$ (*рис. 3*).

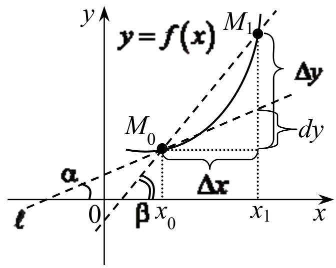

Рис. 3. К определению производной функции в точке

Определение 13. Величина $\Delta x = x_1 - x_0$ называется *приращением аргумента в точке* x_0, а величина $\Delta y = f\left(x_1\right) - f\left(x_0\right) = f\left(x_0 + \Delta x\right) - f\left(x_0\right)$ — *приращением функции в точке* x_0. При этом Δx может быть как положительным, так и отрицательным.

Определение 14. Если существует предел отношения приращения функции Δy в точке x_0 к приращению аргумента Δx в этой же точке при $\Delta x \to 0$, то такой предел называется *производной функции* $y = f(x)$ в точке x_0 и обозначается $y'(x_0)$ или $f'(x_0)$:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right) = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}. \qquad (2.1)$$

Функция, имеющая производную в точке x_0, называется дифференцируемой в этой точке, а процесс отыскания производной называется дифференцированием.

Замечание.

Можно показать, что если $f(x)$ дифференцируема в точке x, то она в ней непрерывна (обратное утверждение неверно).

Определение 15. Функция называется *дифференцируемой на интервале* (a,b), если она дифференцируема в любой точке этого интервала.

Пример 23. Пусть $f(x) = x$, тогда $f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0}\frac{(x+\Delta x) - x}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta x}{\Delta x} = 1$, т.е. $f'(x) = 1$ для $x \in (-\infty, +\infty)$.

Пример 24. $f(x) = |x|$. Покажем, что в точке $x = 0$ производная этой функции не существует. Рассмотрим выражение:

$\frac{|0+\Delta x| - |0|}{\Delta x} = \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = \left[\begin{array}{l} 1,\ \Delta x > 0 \\ -1,\ \Delta x < 0 \end{array}\right.$, т.е. это выражение при $\Delta x \to 0$ предела не имеет (см. замечание 1 к определению производной). Заметим что данная функция при $x \neq 0$ дифференцируема, причем $f'(x) = \left[\begin{array}{l} 1,\ x > 0 \\ -1,\ x < 0 \end{array}\right.$.

Физический смысл производной. Рассмотрим функцию $y = f(x)$, дифференцируемую в точке x_0 (*рис. 3*). Отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ является средней скоростью изменения этой функции на отрезке $[x_0, x_1]$ (или $[x_1, x_0]$, если $\Delta x < 0$). Тогда, согласно (2.1), $f'(x_0)$ представляет собой скорость изменения функции $f(x)$ в точке x_0 (т.е. «мгновенную» скорость).

Пример 25. При свободном падении с нулевой начальной скоростью зависимость пути S от времени t выражается функцией $S(t)=g\dfrac{t^2}{2}$, где $g=9{,}8\,м/сек^2$. Найдем закон изменения скорости V от времени t при таком движении.

Поскольку в соответствии с физическим смыслом производной $V(t)=S'(t)$, то следует при любом фиксированном t составить отношение $\dfrac{\Delta S}{\Delta t}=\dfrac{S(t+\Delta t)-S(t)}{\Delta t}$ и перейти к пределу при $\Delta t\to 0$:

$$S(t+\Delta t)=\frac{g}{2}(t+\Delta t)^2=\frac{g}{2}\left(t^2+2t\Delta t+(\Delta t)^2\right),$$

$$\frac{\Delta S}{\Delta t}=\frac{1}{\Delta t}\left\{\frac{g}{2}\left[t^2+2t\Delta t+(\Delta t)^2\right]-\frac{gt^2}{2}\right\}=g\left(t+\frac{\Delta t}{2}\right);$$

$$V(t)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta S}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\left[gt+g\frac{\Delta t}{2}\right]=gt.$$

Итак, установлено, что скорость увеличивается пропорционально времени t. Так, например, в момент $t=2\ сек$ мгновенная скорость падения будет $V(2)=9{,}8\dfrac{м}{сек^2}\cdot 2\ сек=19{,}6\dfrac{м}{сек}$.

Геометрический смысл производной. Рассмотрим M_0M_1 — секущую графика функции $y=f(x)$ (*рис. 3*), угловой коэффициент которой $\operatorname{tg}\beta=\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$.

Определение 16. *Касательной* l в точке $M_0\left(x_0,f\left(x_0\right)\right)$ к графику функции $y=f(x)$ называется прямая, проходящая через M_0 и являющаяся предельным положением секущей M_0M_1 при устремлении точки M_1 по графику к точке M_0 с любой стороны.

При этом $\Delta x\to 0$, $\Delta y\to 0$, $\angle\beta\to\angle\alpha$, а угол между M_0M_1 и касательной l стремится к нулю.

В силу данного определения и определения производной

$$f'(x)=\operatorname{tg}\alpha, \tag{2.2}$$

т.е. производная в точке x_0 является *угловым коэффициентом касательной* к графику функции $y=f(x)$ в точке $M_0\left(x_0,f\left(x_0\right)\right)$. Заметим, что если

$f(x)$ не дифференцируема при $x = x_0$, то в соответствующей точке график этой функции не имеет касательной.

Согласно формуле (2.2), уравнение невертикальной касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке $M_0(x_0, y_0)$, где $y_0 = f(x_0)$, имеет вид:

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0). \tag{2.3}$$

Для невертикальной нормали к графику функции $y = f(x)$ в точке M_0 (т.е. прямой, проходящей через M_0 перпендикулярно касательной) получим уравнение:

$$y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0), \quad f'(x_0) \neq 0. \tag{2.4}$$

Пусть $y = f(x)$ имеет в точке x_0 производную $f'(x_0)$. Зафиксируем эту точку и рассмотрим малое приращение Δx в точке x_0 (*рис. 4*). Согласно определению производной (2.1), а также свойству 1 бесконечно малых функций, можно записать:

$\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0) + \alpha(\Delta x)$, где $\alpha(\Delta x) \to 0$ при $\Delta x \to 0$, т.е. $\alpha = \alpha(\Delta x)$ бесконечно малая функция Δx при $\Delta x \to 0$, откуда получим

$$\Delta y = f'(x_0)\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x. \tag{2.5}$$

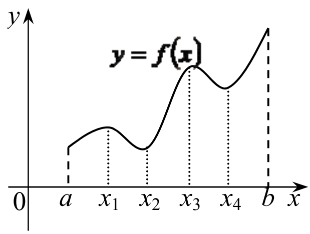

Рис. 4. К понятию экстремума функции

Определение 17. *Дифференциалом* dy функции $y = f(x)$ в точке x_0 называется главная часть ее приращения Δy в этой точке, линейная относительно Δx:

$$dy = f'(x_0)\Delta x. \tag{2.6}$$

Если $f'(x_0) \neq 0$, то величина $\alpha(\Delta x) \cdot \Delta x$ в выражении (2.5) является бесконечно малой высшего порядка по сравнению с главной частью приращения.

Дифференциал зависит как от самой точки x_0, так и от приращения Δx и в выражении (2.6) x_0 обычно заменяется переменной $x: dy = f'(x)\Delta x$.

Рассмотрим функцию вида $y = x$. Поскольку $y'(x) = 1$ при всех x, как было показано в примере (4.1), то для такой функции $dy = dx = 1 \cdot \Delta x = \Delta x$, т.е.

$$dx = \Delta x. \tag{2.7}$$

Таким образом, дифференциал независимой переменной совпадает с ее приращением. С учетом этого можно записать:

$$dy = f'(x)dx \text{ или } f'(x) = \frac{dy}{dx} \tag{2.8}$$

Из формул (2.8) с учетом геометрического смысла производной (*рис. 3*), ясен геометрический смысл дифференциала: dy в точке $x = x_0$ есть *приращение ординаты касательной* к графику функции $y = f(x)$ в точке $M_0\left(x_0, f\left(x_0\right)\right)$, соответствующее приращению аргумента Δx.

2.2. Правила дифференцирования. Производная сложной функции. Производные основных элементарных функций

На основании определения производной и теорем о вычислении пределов можно установить следующие правила дифференцирования.

Пусть $u = u(x)$ и $\upsilon = \upsilon(x)$ дифференцируемы в точке x. Тогда в той же точке дифференцируемы их сумма, произведение, а если $\upsilon(x) \neq 0$, то и частное $u(x)/\upsilon(x)$, причем

$$\begin{aligned}
&1)\ y(x) = u(x) + \upsilon(x),\ \ y'(x) = u'(x) + \upsilon'(x);\\
&2)\ y(x) = u(x)\cdot\upsilon(x),\ \ y'(x) = u'(x)\cdot\upsilon(x) + \upsilon'(x)\cdot u(x);\\
&3)\ y(x) = \frac{u(x)}{\upsilon(x)},\ \ y'(x) = \frac{u'(x)\cdot\upsilon(x) - \upsilon'(x)\cdot u(x)}{\upsilon^2(x)},\ \ \upsilon(x) \neq 0.
\end{aligned} \tag{2.9}$$

Кроме того, имеет место правило дифференцирования сложной функции: пусть функция $u = \varphi(x)$ дифференцируема в точке x, а $y = f(u)$ дифференцируема в точке $u = \varphi(x)$, тогда сложная функция $y = f\left[\varphi(x)\right]$ дифференцируема в точке x, причем

$$y'(x) = f'(u)\cdot\varphi'(x) \text{ или } y'(x) = y'(u)\cdot u'(x). \quad (2.10)$$

Основываясь на определении производной, правилах вычисления пределов, а также правилах (2.9) и (2.10), можно найти производные основных элементарных функций:

1. $y(x) = c = \text{const}, \quad y'(x) = 0;$
2. $y(x) = x^{\alpha}, \ \alpha \in R, \quad y'(x) = \alpha x^{\alpha-1};$
3. $y(x) = \sin x, \quad y'(x) = \cos x;$
4. $y(x) = \cos x, \quad y'(x) = -\sin x;$
5. $y(x) = \log_a x, \quad y'(x) = \dfrac{1}{x\ln a} \ (a > 0, a \neq 1);$

   $y(x) = \ln x, \quad y'(x) = \dfrac{1}{x};$ (2.11)
6. $y(x) = a^x, \quad y'(x) = a^x \ln a, \quad (a > 0, a \neq 1);$

   $y(x) = e^x, \quad y'(x) = e^x;$
7. $y(x) = \operatorname{tg} x, \quad y'(x) = \dfrac{1}{\cos^2 x};$
8. $y(x) = \operatorname{ctg} x, \quad y'(x) = -\dfrac{1}{\sin^2 x}.$

Из правила 2 и соотношения 1 формул (2.11) следует

5) $y(x) = c\cdot u(x) \ (c = \text{const}), \quad y'(x) = cu'(x).$

Пример 26. Требуется найти производные функций:

(а) $y(x) = \sin x + 2^x$; (б) $y(x) = x^3 \ln x$; (в) $y(x) = \dfrac{x^5}{\cos x}$; (г) $y(x) = (\ln x)^3$;
(д) $y(x) = \ln|x|$.

Решение.

(а) $y'(x) = (\sin x)' + \left(2^x\right)' = \cos x + 2^x \ln 2;$

(б) $y'(x) = \left(x^3\right)'\ln x + x^3(\ln x)' = 3x^2 \ln x + x^3 \cdot \dfrac{1}{x} = x^2(1 + 3\ln x);$

(в) $y'(x) = \dfrac{\left(x^5\right)'\cos x - x^5(\cos x)'}{(\cos x)^2} = \dfrac{5x^4 \cos x - x^5(-\sin x)}{\cos^2 x} =$

$$=\frac{x^4}{\cos^2 x}(5\cos x + x\sin x);$$

(г) Эта функция сложная: $y(u)=u^3$, $u=\ln x$.

Поскольку $y'(u)=3u^2$, $u'(x)=\frac{1}{x}$, то согласно (2.10), получим: $y'(x)=3u^2\cdot\frac{1}{x}=3(\ln x)^2\cdot\frac{1}{x};$

(д) Перепишем функцию в другом виде:

$$y(x)=\left[\begin{array}{l}\ln x,\ x>0\\ \ln(-x),\ x<0\end{array}\right.,\ \text{откуда}\ y'(x)=\left[\begin{array}{l}\frac{1}{x},\ x>0\\ \frac{1}{(-x)}(-x)'=\frac{1}{x},\ x<0\end{array}\right.,$$

т.е. $y'(x)=1/x$ для всех x, отличных от нуля.

2.3. Техника дифференцирования. Производная обратной функции, неявной функции и функции, заданной параметрически

Пусть для функции $y=f(x)$ существует обратная $x=\varphi(y)$, причем $f'(x)$ определена и отлична от нуля. Тогда в точке $y=f(x)$ существует производная обратной функции $\varphi'(y)$, причем

$$\varphi'(y)=\frac{1}{f'(x)},\ \text{или}\ x'(y)=\frac{1}{y'(x)} \tag{2.12}$$

Пример 27. Найдем производную функции $y=\arcsin x$, которая является обратной для функции $x=\sin y$ при $y\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$, причем $x'(y)=\cos y\neq 0$ в интервале $-\frac{\pi}{2}<y<\frac{\pi}{2}$. Согласно (2.12), $y'(x)=\frac{1}{x'(y)}=$ $=\frac{1}{\cos y}$, а так как при $-\frac{\pi}{2}<y<\frac{\pi}{2}$, $\cos y=\sqrt{1-\sin^2 y}=\sqrt{1-x^2}$, тогда $y'(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Проводя аналогичные выкладки, таблицу производных можно дополнить:

$$
\begin{aligned}
&9.\ y = \arcsin x,\quad y'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}};\\
&10.\ y = \arccos x,\quad y'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}};\\
&11.\ y = \mathrm{arctg}\, x,\quad y'(x) = \frac{1}{1+x^2};\\
&12.\ y = \mathrm{arcctg}\, x,\quad y'(x) = -\frac{1}{1+x^2}.
\end{aligned}
\tag{2.13}
$$

Определение 18. Говорят, что функция $y(x)$ задана *параметрически*, если она определяется двумя функциями аргумента *t*, называемого параметром:

$$
\begin{aligned}
x &= \varphi(t),\\
y &= \psi(t),
\end{aligned}
\tag{2.14}
$$

и при этом для функции $x = \varphi(t)$ существует обратная $t = \varphi^{-1}(x)$. Параметр *t* существует на некотором множестве *T* (например, на отрезке $[t_1, t_2]$).

Если $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ дифференцируемы в некоторой области изменения *t*, причем $\varphi'(t) \neq 0$, то производная $y'(x)$ находится по формуле:

$$y'(x) = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)} = \frac{y'(t)}{x'(t)} \tag{2.15}$$

Пример 28. Найдем производную функции, заданной в параметрическом виде: $x = a\cos t$, $y = b\sin t$ (a, b — некоторые числа).

Согласно (4.16)

$$y'(x) = \frac{(b\sin t)'}{(a\cos t)'} = \frac{b\cos t}{-a\sin t} = -\frac{b}{a}\mathrm{ctg}\, t.$$

Определение 19. Пусть переменные *x* и *y* связаны уравнением

$$F(x, y) = 0 \tag{2.16}$$

Если каждому значению переменной x, изменяющейся на множестве X (например, интервале или отрезке) соответствует одно и только одно значение y, удовлетворяющее вместе с x уравнению (2.16), то говорят, что это уравнение определяет *неявную функцию* $y(x)$.

Пример 29. $F(x,y)=\sin(xy)+x^3+y^4+3=0$

Для того, чтобы найти производную $y'(x)$ неявной функции, совсем не обязательно разрешать уравнение (2.16) относительно y. Для этого достаточно воспользоваться следующей методикой:

1) Вычислить производную по x левой части (2.16) как производную сложной функции $F(x,y(x))$;
2) Приравнять эту производную к нулю: $\frac{d}{dx}F(x,y(x))=0$;
3) Разрешить получившееся уравнение относительно $y'(x)$, при этом $y'(x)$ будет зависеть как от x, так и от y.

Пример 30. $F(x,y)=x^2+y^2-a^2=0$, где a — некоторое число;

$$\frac{d}{dx}F(x,y(x))=2x+2y\cdot y'(x)=0, \text{ откуда } y'(x)=-\frac{x}{y}.$$

Определение 20. Производная от производной функции $y=f(x)$ называется *второй производной* (или производной второго порядка) этой функции. Ее обозначение: $y''(x), f''(x)$ или $\frac{d^2y}{dx^2}$.

Пример 31. $y=\sin^2 x,\quad y'=2\sin x\cos x=\sin 2x,\quad y''=2\cos 2x.$

Аналогично определяются производные третьего порядка, четвертого и т.д.

2.4. Формула Тейлора

Пусть функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности точки $x=x_0$ и имеет непрерывные производные до $(n+1)$-го порядка включительно.

Тогда справедлива формула Тейлора:

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\frac{f'''(x_0)}{3!}(x-x_0)^3+\ldots+ \\ +\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+R_n(x). \tag{2.17}$$

Остаточный член n-го порядка формулы Тейлора может быть записан в форме Лагранжа:

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}, \tag{2.18}$$

где ξ — некоторая промежуточная точка между x_0 и x $\left(\xi=x_0+\theta(x-x_0),0<\theta<1\right)$, либо в форме Пеано:

$$R_n(x)=o\left((x-x_0)^n\right). \tag{2.19}$$

Запись (2.19) означает, что $R_n(x)$ — б.м. более высокого порядка, чем $(x-x_0)^n$ при $x\to x_0$.

При $x_0=0$ из (2.17) получаем формулу Маклорена:

$$f(x)=\frac{f'(x_0)}{1!}x+\frac{f''(x_0)}{2!}x^2+\frac{f'''(x_0)}{3!}x^3+...++\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}x^n+R_n(x), \tag{2.20}$$

при этом ξ находится между нулем и x.

Приведем основные разложения в ряд Маклорена, имеющие широкое применение на практике:

1. $e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+...++\frac{x^n}{n!}+o\left(x^n\right);$
2. $\sin x=\frac{x}{1!}-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}...++(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+o\left(x^{2n}\right);$
3. $\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}...+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+o\left(x^{2n+1}\right);$
4. $(1+x)^m=1+\frac{m}{1!}x+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3...+$
   $+\frac{m(m-1)(m-2)...(m-(n-1))}{(n)!}x^n+o\left(x^n\right);$
5. $\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+...+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+o\left(x^n\right).$

2.5. Правило Лопиталя (неопределенности типа $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$).

Пусть выполняются следующие условия:

1) Функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ дифференцируемы в некоторой окрестности $\left(x_0-\delta, x_0+\delta\right)$, $\delta>0$ точки x_0, за исключением, быть может, самой точки x_0;
2) $\varphi'(x)\neq 0$ для любого $x\in\left(x_0-\delta, x_0\right)\cup\left(x_0, x_0+\delta\right)$;
3) При $x\to x_0$ обе функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ бесконечно малые, или же обе бесконечно большие, т.е. частное $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ при $x\to x_0$ представляет неопределенность типа $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$;
4) Существует предел отношения производных $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$. Тогда

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)} \tag{2.21}$$

Пример 32. Вычислите $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{e^x}$ (неопределенность типа $\frac{\infty}{\infty}$).

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{e^x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(x)'}{\left(e^x\right)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{e^x}=0.$$

Пример 33. Вычислите $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^2 3x}{3\cos^2 x}$ (неопределенность типа $\frac{0}{0}$).

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^2 3x}{3\cos^2 x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{2\cos 3x(-\sin 3x)\cdot 3}{3\cdot 2\cos x(-\sin x)}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos 3x}{\cos x}\cdot\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sin 3x}{\sin x}=$$

$=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos 3x}{\cos x}\cdot\frac{(-1)}{1}=-\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos 3x}{\cos x}$. Этот предел вычисляем снова по правилу Лопиталя: $-\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos 3x}{\cos x}=-\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{3(-\sin 3x)}{(-\sin x)}=-3\frac{(-1)}{1}=3.$

Вычисление пределов с неопределенностями, символически обозначаемыми $0\cdot\infty$, 0^0, ∞^0, 1^∞, $\infty-\infty$, сводится с помощью различных преобразований к неопределенностям типа $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$.

Пример 34. Найдите предел $\lim\limits_{x\to 0+}[x\ln x]$.

Имеем неопределенность типа $0\cdot\infty$).

$$\lim_{x\to 0+}(x\ln x)=\lim_{x\to 0+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0+}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{-1}{x^2}}=\lim_{x\to 0+}(-x)=0.$$

Пример 35. $\lim\limits_{x\to 0}x^{2x}$ (неопределенность типа 0^0). Поскольку $x=e^{\ln x}$, то $\lim\limits_{x\to 0}x^{2x}=\lim\limits_{x\to 0}e^{2x\ln x}=e^{\lim\limits_{x\to 0}[2x\ln x]}$, так как экспоненциальная функция непрерывна; $\lim\limits_{x\to 0}[2x\ln x]=2\lim\limits_{x\to 0}[x\ln x]=0$ (см. предыдущий пример), следовательно, искомый предел равен $e^0=1$.

3. Общее исследование функций

3.1. Исследование функции с помощью первой производной. Примеры экстремальных задач

Теорема 7 (необходимые условия возрастания (убывания) функции).
Если функция $y=f(x)$, дифференцируемая на интервале (a,b), возрастает (убывает) на (a,b), то $f'(x)\ge 0(f'(x)\le 0)$ для $a<x<b$.

Теорема 8 (достаточные условия возрастания (убывания) функции).
Если функция $y=f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$ и дифференцируема на интервале (a,b), причем $f'(x)>0(f'(x)<0)$ для $a<x<b$, то эта функция возрастает (убывает) на $[a,b]$.

Пример 36. $y=x^3-3x^2$. Эта функция дифференцируема на всей числовой прямой, причем $y'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)$. Исследуя знак $y'(x)$ убеждаемся, что $y'(x)<0$ для $x<0$ или $x>2$ и $y'(x)>0$ для $0<x<2$. Следовательно $y(x)$ возрастает на множестве $(-\infty;0)\cup(2;+\infty)$ и убывает на интервале $(0;2)$.

Пример 37. $y=\frac{1}{x}.$ Эта функция непрерывна и дифференцируема всюду кроме точки $x=0,$ в которой она не определена.

Поскольку $y'(x)=-\frac{1}{x^2}<0$ для $x\neq 0.$ то $y(x)$ убывает на $(-\infty;0),$ а также на $(0;+\infty).$

Определение 21. Функция $y=f(x)$ имеет в точке $x=x_0$ *максимум (минимум),* если существует такая окрестность точки $x_0,$ что для всякой точки x из этой окрестности, отличной от $x_0,$ справедливо неравенство $f(x)<f\left(x_0\right)$ (соответственно $f(x)>f\left(x_0\right)$).

Максимум или минимум $f\left(x_0\right)$ называется экстремумом функции $f(x),$ а точка x_0 — точкой экстремума (максимума или минимума).

Замечание. Не следует путать максимум (минимум) функции с ее наибольшим (наименьшим) значением, например, на отрезке $[a,b].$

Понятие экстремума — это локальное понятие, связанное с конкретной точкой графика функции, а наибольшее и наименьшее значения — это понятия, связанные с отрезком, на котором рассматривается данная функция. Так, непрерывная функция, изображенная на *рис. 4*, имеет в точках x_1 и x_3 максимум, а в точках x_2 и x_4 — минимум, причем $f\left(x_4\right)>f\left(x_1\right),$ а своего наибольшего и наименьшего значения данная функция достигает вообще на границах отрезка $[a,b].$

Определение 22. Точка $x_0,$ в которой производная функции $y=f(x)$ равна нулю или терпит разрыв (при этом не существует) называется *критической (или критической точкой первого рода).* Критическая точка $x_0,$ в которой $f'\left(x_0\right)=0,$ называется *стационарной.*

Теорема 9 (достаточные условия существования экстремума или его отсутствия).

Если существует окрестность $\left(x_0-\delta,x_0+\delta\right),\delta>0,$ критической точки $x_0,$ в которой функция $y=f(x)$ непрерывна всюду и дифференцируема всюду, кроме, возможно, самой точки $x_0,$ причем

$$f'(x)>0\ \left(f'(x)<0\right) \text{ при } x_0-\delta<x<x_0,$$
$$f'(x)<0\ \left(f'(x)>0\right) \text{ при } x_0<x<x_0+\delta, \tag{3.1}$$

то x_0 — точка максимума (минимума). Если же $f'(x)$ сохраняет знак во всей окрестности $\left(x_0-\delta, x_0+\delta\right)$, кроме, возможно, точки x_0, то в этой точке $f(x)$ не имеет экстремума.

Иногда бывает удобно воспользоваться другим достаточным условием существования (или отсутствия) экстремума.

Теорема 10. Если

$$f'\left(x_0\right)=0 \text{ и } f''\left(x_0\right)<0\left(f''\left(x_0\right)>0\right), \tag{3.2}$$

то x_0 — точка максимума (минимума) функции $y=f(x)$.

Если же $f'\left(x_0\right)=0$, $f''\left(x_0\right)=0$, $f'''\left(x_0\right)\neq 0$, то в точке x функция $f(x)$ не имеет экстремума.

Пример 38. $y=|x|=\left[\begin{array}{l} x,\ x\geq 0 \\ -x,\ x<0 \end{array}\right.$.

У этой непрерывной функции одна критическая точка $x=0$, в которой $y'(x)$ не существует, причем $y'(x)=1>0$ для $x>0$, $y'(x)=-1$ для $x<0$ и, согласно условиям (3.1), x_0 — точка минимума данной функции (*рис. 5*).

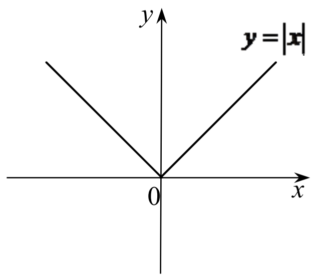

Рис. 5. Точка минимума на графике функции

Пример 39. $y=x^3$. Функция дифференцируема всюду. Поскольку $y'(x)=3x^2$, то $x=0$ — единственная критическая (стационарная) точка; $y'(x)>0$ как справа, так и слева от точки $x=0$, следовательно, в этой точке нет экстремума.

Пример 40. $y=2x+3\sqrt[3]{x^2}$. Функция непрерывна на $(-\infty;+\infty)$;

$$y'(x)=2+3\left(x^{\frac{2}{3}}\right)'=2+3\cdot\frac{2}{3}x^{\frac{2}{3}-1}=2+\frac{2}{\sqrt[3]{x}}=\frac{2\left(\sqrt[3]{x}+1\right)}{\sqrt[3]{x}}.$$

Критические точки $x_1 = -1$ и $x_2 = 0$, т.к. $y'(-1) = 0$, а $y'(0)$ не существует. Нетрудно убедиться, что, согласно условиям (3.1), $x_1 = -1$ — точка максимума, а $x_2 = 0$ — точка минимума данной функции.

Отметим, что в стационарной точке $x_1 = -1$ исследование на экстремум можно провести и с помощью второй производной (условие (3.2)):

$$y''(x) = \left(2 + \frac{2}{\sqrt[3]{x}}\right)' = (2x^{-\frac{1}{3}})' = -\frac{2}{3}x^{-\frac{4}{3}} = -\frac{2}{3x\sqrt[3]{x}}, \quad \text{т.е.} \quad y''(-1) = -\frac{2}{3} < 0 \quad \text{и,}$$

следовательно, $x_1 = -1$ — точка максимума.

Теорема 11. Функция $y = f(x)$, непрерывная на отрезке $[a,b]$, достигает своего наибольшего (наименьшего) значения либо в критических точках, либо на концах отрезка $[a,b]$.

Ниже предлагаем в качестве самостоятельной работы несколько интересных занимательных примеров экстремальных задач из истории математики. Экстремальные задачи можно представить как задачи на нахождение экстремумов (минимумов и максимумов) функций. В частном случае, это — задачи на нахождение наибольшего и наименьшего значений величин (значений функций в некоторой заданной области изменения независимой переменной). Экстремальные задачи имеют очень древнюю историю, ими занимались еще древнегреческие математики. На их решении мы останавливаться не будем, однако оставляем на размышление читателю вопрос поиска разных подходов к их решению (геометрический, аналитический способ).

1. Задача Герона (см. *рис. 6*):

Даны две точки A и B по одну сторону от прямой L. Найти на L такую точку C, чтобы сумма расстояний AC+CB была наименьшей.

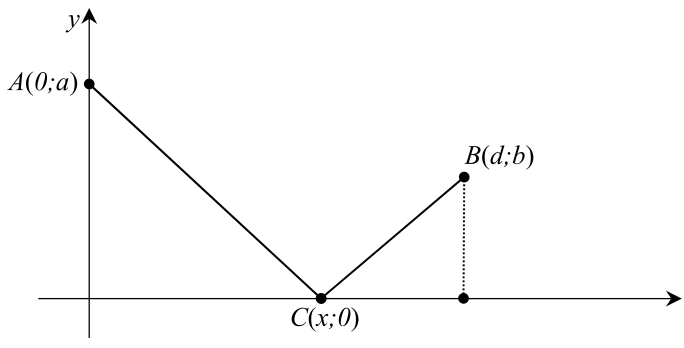

Рис. 6. К определению двухзвенной ломаной наименьшей длины

Как известно, искомая точка C принимает такое положение, при котором выполняется равенство углов «падения» и «отражения»: $x = ad\big/\left(a+b\right)$.

2. Задача Кеплера (см. *рис. 7*):

Вписать в заданный круг прямоугольник наибольшей площади.

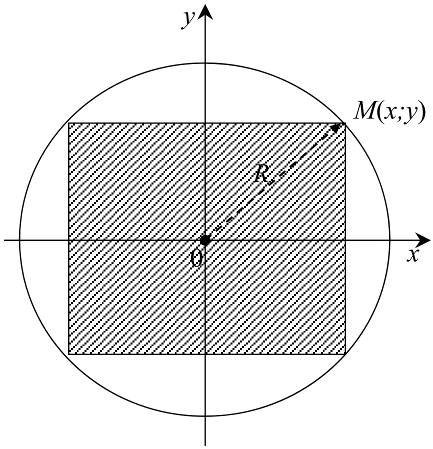

Рис. 7. Вписанный в круг прямоугольник наибольшей площади

Искомый прямоугольник есть квадрат со стороной $2\sqrt{R}$, где R — радиус круга.

3. Задача Евклида (см. *рис. 8*):

В данный треугольник ABC вписать параллелограмм ADEF (EF || AB, DE || AC) наибольшей площади.

Известно, что искомый параллелограмм делит все стороны треугольника пополам.

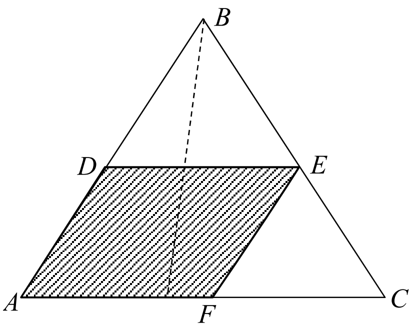

Рис. 8. Определение вписанного параллелограмма наибольшей площади

4. Задача Дидоны:

Среди замкнутых плоских кривых, имеющих заданную длину, найти кривую, охватывающую максимальную площадь.

Понятно, что такой кривой будет окружность.

5. *Заданное положительное число разложите на два слагаемых так, чтобы их произведение было наибольшим.*

3.2. Исследование функции с помощью второй производной

Определение 23. График дифференцируемой на (a,b) функции $y = f(x)$ называется *выпуклым вверх (выпуклым вниз) на* (a,b), если он расположен ниже (выше) своей касательной, проведенной в любой своей точке $M(x, y)$, $a < x < b$ (*рис. 9*).

Часто вместо термина «выпуклый вверх» употребляют термин «вогнутый вниз», а вместо «выпуклый вниз» — «вогнутый вверх».

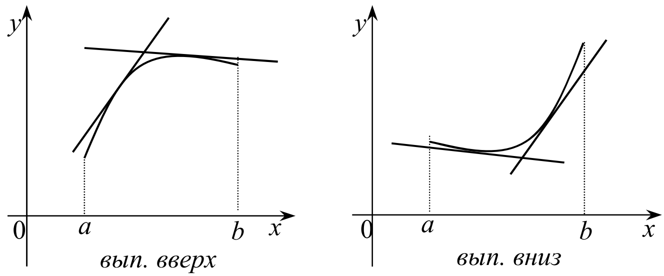

Рис. 9. Выпуклость и вогнутость графика функции

Теорема 12 (достаточный признак характера выпуклости). Пусть функция $y = f(x)$ имеет на (a,b) вторую производную.

Если при любом $x \in (a,b)$

$$f''(x) < 0 \ \left(f''(x) > 0\right), \tag{3.3}$$

то график этой функции является на (a,b) выпуклым вверх (вниз).

Определение 24. Точка $M\left(x_0, f\left(x_0\right)\right)$ графика непрерывной функции $y = f(x)$, которая отделяет его выпуклую вверх часть от выпуклой вниз, называется *точкой перегиба*.

Определение 25. Точка x_0, в которой вторая производная функции $y = f(x)$ обращается в ноль или терпит разрыв (при этом не существует), называется *критической точкой второго рода*.

Теорема 13 (достаточные условия существования точки перегиба или ее отсутствия). Пусть существует окрестность $\left(x_0 - \delta, x_0 + \delta\right)$, $\delta > 0$ критической точки x_0 второго рода, в которой функция $y = f(x)$ всюду непрерывна и имеет вторую производную везде, кроме, возможно, самой точки x_0. Пусть при этом в интервалах $\left(x_0 - \delta, x_0\right)$ и $\left(x_0, x_0 + \delta\right)$ вторая производная $f''(x)$ сохраняет постоянные знаки. Если эти знаки противоположные, то точка *M* графика функции с абсциссой x_0 является точкой перегиба, если же эти знаки одинаковые, то указанная точка *M* точкой перегиба не является.

Пример 41. $y = x^3 - 6x^2 + 12x + 4.$ Найдем $y' = 3x^2 - 12x + 12,$ $y'' = 6x - 12 = 6(x-2).$ Функция $y(x)$ всюду дифференцируема, точка $x = 2$ — единственная критическая точка второго рода: $y''(2) = 0.$ Поскольку $y''(x) > 0$ при $x > 2$ и $y''(x) < 0$ при $x < 2$, то $x = 2$ — абсцисса точки перегиба. Ее ординатой будет $2^3 - 6\cdot 2^2 + 12\cdot 2 + 4 = 12,$ т.е. $M(2;12)$ — точка перегиба, причем для $x < 2$ график выпуклый вверх, для $x > 2$ — выпуклый вниз.

Пример 42. $y = \sqrt[3]{x+2}.$ Функция всюду непрерывна.

Найдем $y'(x) = \dfrac{1}{3}(x+2)^{-\frac{2}{3}},$ $y'' = -\dfrac{2}{9}(x+2)^{-\frac{5}{3}} = -\dfrac{2}{9\sqrt[3]{(x+2)^5}},$ откуда видно, что $x = -2$ — критическая точка второго рода, т.к. $y''(-2)$ не существует. Поскольку $y''(x) < 0$ для $x > -2$ и $y''(x) > 0$ для $x < -2$, то $M(-2;0)$ — точка перегиба, причем для $x < -2$ график выпуклый вниз, а для $x > -2$ — выпуклый вверх.

3.3. Асимптоты графика функции

Определение 26. Пусть точка $M(x, y)$ перемещается по графику функции $y = f(x)$, неограниченно удаляясь от начала координат. Если при этом расстояние от этой точки до некоторой прямой стремится к нулю, то такая прямая называется *асимптотой графика функции* $y = f(x)$.

Асимптота может быть параллельной оси $0y$ (тогда она называется
Рис. 10. К определению асимптоты графика функции

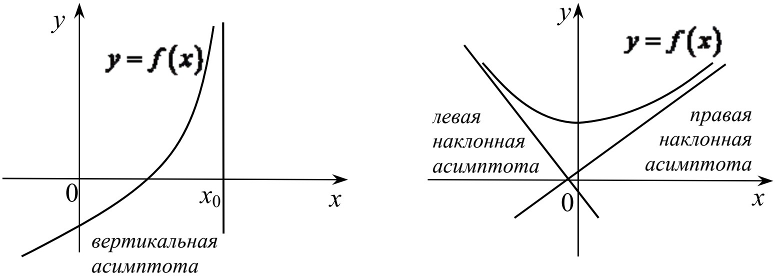

Рис. 10. К определению асимптоты графика функции

вертикальной) или не параллельной ей (тогда она называется наклонной) (*рис. 10*).

Теорема 14. (о вертикальных асимптотах).

Если существует такое число x_0, что

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \infty, \tag{3.4}$$

то прямая $x = x_0$ является вертикальной асимптотой графика функции $y = f(x)$. И обратно: если $x = x_0$ — вертикальная асимптота, то выполняется (3.4).

Пример 43. $y = \dfrac{1}{x}$. График этой функции имеет вертикальную асимптоту — ось $0y$.

Теорема 15. (о наклонных асимптотах). Если для функции $y = f(x)$ существуют пределы:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = k_1; \quad \lim_{x\to+\infty} \left[f(x) - k_1 x \right] = b_1, \tag{3.5}$$

то прямая $y = k_1 x + b_1$ является правой наклонной асимптотой, т.е. асимптотой при $x \to +\infty$.

Если существуют пределы:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=k_2;\quad \lim_{x\to-\infty}\left[f(x)-k_2x\right]=b_2, \tag{3.6}$$

то прямая $y=k_2x+b_2$ является левой наклонной асимптотой, т.е. асимптотой при $x\to-\infty$.

Важно подчеркнуть, что если график функции имеет правую (левую) асимптоту, то она единственная. Вертикальных же асимптот может быть даже бесконечно много, так, например, для графика функции $y=\operatorname{tg}x$ асимптотами являются вертикальные прямые $x=\frac{\pi}{2}$, $x=-\frac{\pi}{2}$, $x=\frac{3\pi}{2}$, $x=-\frac{3\pi}{2}$,.....

Пример 44. $y=\frac{x^2+2x-1}{x}$. Вертикальной асимптотой будет ось 0y, т.к. $y(x)\to\infty$ при $x\to 0$.

Наклонные асимптоты найдем из соотношений (3.5), (3.6):

$$k_1=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+2x-1}{x\cdot x}=\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}\right)=1,$$

$$b_1=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x^2+2x-1}{x}-x\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x-1}{x}=\lim_{x\to+\infty}\left(2-\frac{1}{x}\right)=2,$$ т.е. правая наклонная асимптота: $y=x+2$; она же будет и левой наклонной асимптотой, т.к. при $x\to-\infty$ значения соответствующих пределов не изменятся.

Пример 45. $y=x+\ln x$, $x>0$. Вертикальной асимптотой будет ось 0y, т.к. при $x\to 0$ $y(x)\to-\infty$. Ищем наклонную асимптоту:

$$k_1=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+\ln x}{x}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{\ln x}{x}\right)=1+\lim_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)'}{x'}=1+0=1$$

$b_1=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x+\ln x-x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x=+\infty$, т.е. наклонной асимптоты нет.

Пример 46. Найдите все асимптоты графика функции

$$y=\frac{x^2-4}{x}e^{-1/x}.$$

Решение. Функция не определена в точке $x=0$, т.е. прямая $x=0$ — возможная вертикальная асимптота;

$$\lim_{x\to 0+} f(x) = \lim_{x\to 0+}\left(\frac{x^2-4}{x}e^{-1/x}\right) = \lim_{x\to 0+}\frac{x^2-4}{x}\frac{1}{e^{1/x}} = \lim_{x\to 0+}\left(x^2-4\right)\lim_{x\to 0+}\frac{\left(1/x\right)}{e^{1/x}} =$$

$$= -4\lim_{x\to 0+}\frac{\left(-1/x^2\right)}{\left(-1/x^2\right)e^{1/x}} = -4\lim_{x\to 0+}\left(\frac{1}{e^{1/x}}\right) = \left(\frac{1}{\infty}\right) = 0;$$

$$\lim_{x\to 0-}\left(\frac{x^2-4}{x}e^{-1/x}\right) = \left(\infty\cdot\infty\right) = \infty,$$

следовательно, $x=0$ — вертикальная асимптота. Отметим, что при вычислении предела мы воспользовались свойствами предела функции, а также правилом Лопиталя.

Проверяем функцию на наличие наклонных асимптот:

$$k_1 = \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2-4}{x^2}e^{-1/x}\right) = 1;$$

$$b_1 = \lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-k_1x\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2-4}{x}e^{-1/x}-x\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{\left(x^2-4\right)e^{-1/x}-x^2}{x} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2\left(e^{-1/x}-1\right)}{x} - 4\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{-1/x}}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{e^{-1/x}-1}{1/x} - 0 = \left(\frac{0}{0}\right) =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{e^{-1/x}\left(1/x^2\right)}{\left(-1/x^2\right)} = \lim_{x\to+\infty}\left(-e^{-1/x}\right) = -1.$$

т.е. $y = k_1x + b_1 = x - 1$ — правая наклонная асимптота. Нетрудно убедиться, что $y = x-1$ будет также и левой наклонной асимптотой.

3.4. Общее исследование функций и построение графиков

При общем исследовании функции $y = f(x)$ рекомендуется следующий порядок действий.

1. Найдите ее область определения, точки разрыва и интервалы непрерывности.
2. Найдите асимптоты графика функции.
3. Найдите интервалы возрастания и убывания функции.
4. Найдите точки максимума и минимума, а также значения функции в этих точках.

5. Исследуйте характер выпуклости (найдите интервалы выпуклости и точки перегиба).
6. На основании результатов проведенного исследования постройте график функции. При этом, если возможно, найдите точки его пересечения с осями координат.

Отметим, что учет свойств симметрии графика относительно осей или начала координат, а также периодичности функции (если таковые имеются) может существенно облегчить процесс исследования.

Пример 47. Исследуйте функцию $y=\dfrac{2x^3+1}{x^2}$ и постройте ее график.

1. Область определения $(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$, $x=0$ — единственная точка разрыва (второго рода): $y\to+\infty$ при $x\to 0$.
2. Асимптоты:
   а) вертикальная — ось $0y$ $(x=0)$;
   б) правая наклонная:
   $k_1=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x^3+1}{x^3}=2;\quad b_1=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\dfrac{2x^3+1}{x^2}-2x\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x^2}=0,\quad y=2x$ —
   правая наклонная асимптота.

в) Вычисления при $x\to-\infty$ показывают, что $y=2x$ также и левая наклонная асимптота.

3. Интервалы возрастания и убывания.
   $y'(x)=\left(2x+\dfrac{1}{x^2}\right)'=2-\dfrac{2}{x^3}=\dfrac{2\left(x^3-1\right)}{x^3}.$
   $y(x)$ возрастает на $(-\infty;0)$ и на $[1;+\infty)$; убывает на $(0;1)$.
4. Экстремумы: $x=1$ — точка минимума, $y(1)=3$.
5. Выпуклость $y''=\dfrac{6}{x^4}>0$, $x\neq 0$, выпуклость вниз на $(-\infty;0)$ и на $(0;+\infty)$.

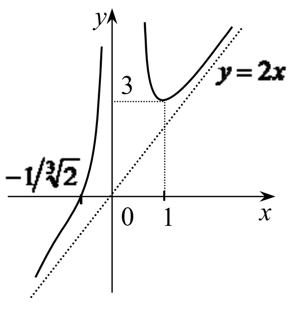

Рис. 11. График функции из примера 47

6. Точки пересечения с осями координат:
   $\dfrac{2x^3+1}{x^2}=0$, следовательно $x=-\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}$ — абсцисса точки пересечения с осью x.

График исследуемой функции представлен на *рис. 11*.

4. Рекомендуемые задачи. Разбор варианта расчетно-графической работы

Этот раздел содержит решение типового варианта расчетно-графической работы.

Каждый вариант заданий включает три основные задачи.

В первой задаче требуется вычислить пределы, используя 1-й и 2-й замечательные пределы, таблицу эквивалентности бесконечно малых, правило Лопиталя. Во второй задаче, применяя таблицу производных элементарных функций и основные правила дифференцирования функций, нужно найти производные заданных функций. В третьей задаче требуется составить уравнения касательной и нормали к графику функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой x_0. В четвертой задаче, заменяя приращение функции дифференциалом, необходимо найти приближенное значение выражения. В пятой задаче требуется с помощью методов дифференциального исчисления и теории пределов провести исследование функции и построить ее график.

Задача 1.

А) $\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{x^2-2x-15}{2x^2+3x-9}$; Б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-7x+5}{6x^3+x+1}$; В) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x-0.5\sin 2x}{x^3}$;

Г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{7x-3}{7x+1}\right)^{3x+1}$; Д) $\lim\limits_{x\to0}\sqrt{x}\cdot\ln x$.

Задача 2.

А) $y=\dfrac{\sqrt[6]{x}\cdot e^x}{x+\mathrm{tg}x}$; Б) $y=\dfrac{1}{\mathrm{arctg}^3 8x}$; В) $y=(\sin x)^{\arccos x}$.

Задача 3.

$y=\sqrt{x},\ x_0=4.$

Задача 4.

$(0{,}99)^{17}$.

Задача 5.

$y=\dfrac{\ln x}{x^2}$.

Решения.

Задача 1.

А) $\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{x^2-2x-15}{2x^2+3x-9}=\left(\dfrac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{(x+3)(x-5)}{2(x+3)\left(x-3/2\right)}=\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{(x-5)}{(2x-3)}=\dfrac{8}{9}.$

Представляем другой способ решения с применением правила Лопиталя:

$$\lim_{x\to-3}\frac{x^2-2x-15}{2x^2+3x-9}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to-3}\frac{\left(x^2-2x-15\right)'}{\left(2x^2+3x-9\right)'}=\lim_{x\to=3}\frac{2x-2}{4x+3}=\frac{8}{9}.$$

Б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-7x+5}{6x^3+x+1}=\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2}{6x^3}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{2x}=\left(\dfrac{1}{\infty}\right)=0,$

т.к. $3x^2-7x+5\sim 3x^2,\ \ 6x^3+x+1\sim 6x^3$ при $x\to\infty.$

В) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x-0.5\sin 2x}{x^3}=\left(\dfrac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x-0.5\cdot 2\sin x\cdot\cos x}{x^3}=$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\sin x(1-\cos x)}{x^3}=\lim_{x\to0}\frac{\sin x\cdot 2\sin^2\dfrac{x}{2}}{x^3}=$$

$$=2\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}\,\frac{\sin\dfrac{x}{2}}{\dfrac{x}{2}}\,\frac{\sin\dfrac{x}{2}}{\dfrac{x}{2}}\,\frac{1}{4}=2\cdot\frac{1}{4}\cdot 1=\frac{1}{2}.$$

Отметим, что при решении были использованы элементарные тригонометрические преобразования и 1-й замечательный предел.

Представим второй способ решения, основанный на применении правила Лопиталя:

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin x-0.5\sin 2x}{x^3}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to0}\frac{(\sin x-0.5\sin 2x)'}{\left(x^3\right)'}=$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\cos x-\cos 2x}{3x^2}=\left(\frac{0}{0}\right)=\frac{1}{3}\lim_{x\to0}\frac{(\cos x-\cos 2x)'}{\left(x^2\right)'}=$$

$$=\frac{1}{3}\lim_{x\to0}\frac{-\sin x+2\sin 2x}{2x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\frac{1}{6}\lim_{x\to0}\frac{(-\sin x+2\sin 2x)'}{x'}=$$

$$=\frac{1}{6}\lim_{x\to 0}\frac{-\cos x+4\cos 2x}{1}=\frac{1}{6}\frac{-1+4}{1}=\frac{1}{2}.$$

Укажем еще третий способ вычисления предела, основанный на применении теоремы 4 о замене на эквивалентные б.м. ($\sin x\sim x$; $1-\cos x\sim\dfrac{x^2}{2}$ при $x\to 0$):

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-0.5\sin 2x}{x^3}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x(1-\cos x)}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot\frac{x^2}{2}}{x^3}=\frac{1}{2}.$$

Г) В этом примере имеем особенность типа $\left(1^{\infty}\right)$, которая сводится ко 2-му замечательному пределу:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{7x-3}{7x+1}\right)^{3x+1}=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{-4}{7x+1}\right)^{\frac{7x+1}{-4}}\right]^{\frac{-4(3x+1)}{7x+1}}=e^{L}=e^{-12/7},$$

где $L=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-12x-4}{7x+1}=\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-12x}{7x}=-\dfrac{12}{7}.$

Д) $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{x}\cdot\ln x=(0\cdot\infty)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln x}{x^{-1/2}}=\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(\ln x)'}{\left(x^{-1/2}\right)'}=$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1/x}{-(1/2)x^{-3/2}}=-2\lim_{x\to 0}x^{1/2}=-2\cdot 0=0.$$

Задача 2.

А) $y=\dfrac{\sqrt[6]{x}\cdot e^x}{x+tgx}=\dfrac{x^{1/6}\cdot e^x}{x+tgx};$

$$y'=\frac{\left(x^{1/6}\cdot e^x\right)'(x+\mathrm{tg}x)-x^{1/6}\cdot e^x(x+\mathrm{tg}x)'}{(x+\mathrm{tg}x)^2}=$$

$$=\frac{\left(\frac{1}{6}x^{-5/6}\cdot e^x+x^{1/6}\cdot e^x\right)(x+\mathrm{tg}x)-x^{1/6}\cdot e^x\left(1+\frac{1}{\cos^2 x}\right)}{(x+\mathrm{tg}x)^2}.$$

Б) $y = \dfrac{1}{\mathrm{arctg}^3 8x} = (\mathrm{arctg} 8x)^{-3}$;

$$y' = -3(\mathrm{arctg} 8x)^{-4} \cdot (\mathrm{arctg} 8x)' = -3(\mathrm{arctg} 8x)^{-4} \cdot \frac{1}{1+(8x)^2}(8x)' =$$

$$= -3(\mathrm{arctg} 8x)^{-4} \cdot \frac{8}{1+64x^2} = \frac{-24}{(1+64x^2)\cdot \mathrm{arctg}^4 8x}.$$

В) $y = (\sin x)^{\arccos x}$. Предварительно прологарифмируем:

$$\ln y = \arccos x \cdot \ln(\sin x),$$

и затем продифференцируем обе части полученного равенства:

$$\frac{y'}{y} = (\arccos x)' \cdot \ln(\sin x) + \arccos x \cdot (\ln(\sin x))',$$

$$y' = y(\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} \cdot \ln(\sin x) + \arccos x \cdot \frac{1}{\sin x} \cdot \cos x),$$

или в конечном виде

$$y' = (\sin x)^{\arccos x} \cdot \left(\frac{-\ln(\sin x)}{\sqrt{1-x^2}} + \mathrm{ctg} x \cdot \arccos x \right).$$

Задача 3.

Найдем производную функции:

$$y = f(x) = \sqrt{x} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}; f(x_0) = \sqrt{4} = 2; f'(x_0) = \frac{1}{4}.$$

Уравнение искомой касательной:

$$y = f(x_0) + f'(x_0)\cdot(x - x_0) \Rightarrow y = 2 + \frac{1}{4}(x-4);$$

уравнение искомой нормали:

$$y = f(x_0) - \frac{1}{f'(x_0)}\cdot(x - x_0) \Rightarrow y = 2 - 4(x-4).$$

Задача 4.

$\left(0,99\right)^{17} \approx ?$ Рассмотрим функцию $y = f\left(x\right) = x^{17}$, причем $x_0 = 1; x - x_0 = 0,99 - 1 = -0,01$. И тогда $f\left(x_0\right) = 1; f'\left(x\right) = 17x^{16} \Rightarrow f'\left(x_0\right) = 17$. Следовательно,

$\left(0,99\right)^{17} \equiv f\left(x\right) \approx f\left(x_0\right) + f'\left(x_0\right)\cdot\left(x - x_0\right) = 1 + 17\cdot\left(-0,01\right) = 0,83.$

Задача 5. $y = \dfrac{\ln x}{x^2}$.

Проведем исследование функции, пользуясь описанным выше алгоритмом.

1. Область определения $x \in (0;+\infty)$.

График функции пересекает ось ox в одной точке (1;0), т.к. $\ln x = 0$ при $x = 1$; с осью oy точек пересечений нет, т.к. точка $x = 0$ не принадлежит области определения. Функция непериодическая, не обладает свойствами четности, нечетности.

2. Имеется вертикальная асимптота $x = 0$ справа, т.к.

$$\lim_{x\to+0}\frac{\ln x}{x^2} = \left(\frac{-\infty}{+0}\right) = (-\infty\cdot+\infty) = -\infty.$$

Найдем наклонную асимптоту $y = kx + b$:

$$k = \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^3} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)'}{\left(x^3\right)'} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{3x^2} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{3x^3} = \left(\frac{1}{\infty}\right) = 0,$$

$$b = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln x}{x^2} - 0\cdot x\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^2} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)'}{\left(x^2\right)'} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1/x}{2x} = 0.$$

Очевидно, справа имеем горизонтальную асимптоту с уравнением $y = 0$, т.к. $k = 0$.

3. $y' = \left(\dfrac{\ln x}{x^2}\right)' = \dfrac{(\ln x)'\cdot x^2 - \left(x^2\right)'\cdot\ln x}{x^4} = \dfrac{x - 2x\ln x}{x^4} = \dfrac{1 - 2\ln x}{x^3}.$

$$y'(x) = 0 \Rightarrow 2\ln x = 1 \Rightarrow x = \sqrt{e}.$$

Далее определяем знаки $y'(x)$ по методу обобщенных интервалов:

$$y' = \frac{1-2\ln x}{x^3} = \begin{cases} > 0, x \in \left(0; \sqrt{e}\right), (\nearrow) \\ = 0, x = \sqrt{e} \\ < 0, x \in \left(\sqrt{e}; +\infty\right), (\searrow) \end{cases}$$

Следовательно, $x = \sqrt{e}$ — точка максимума, причем

$$y_{\max} = y\left(\sqrt{e}\right) = \frac{\ln\sqrt{e}}{\left(\sqrt{e}\right)^2} = \frac{1}{2e}.$$

4. $y'' = \left(\dfrac{1-2\ln x}{x^3}\right)' = \dfrac{(1-2\ln x)' \cdot x^3 - \left(x^3\right)' \cdot (1-2\ln x)}{x^6} =$

$$= \frac{-\frac{2}{x} \cdot x^3 - 3x^2 \cdot (1-2\ln x)}{x^6} = \frac{x^2(-2-3(1-2\ln x))}{x^6} =$$

$$= \frac{-2-3+6\ln x}{x^4} = \frac{6\ln x - 5}{x^4}.$$

$y''(x) = 0 \Rightarrow -5 + 6\ln x = 0 \Rightarrow x = e^{5/6} = \sqrt[6]{e^5}.$

Определяем знаки $y''(x)$:

$$y'' = \frac{6\ln x - 5}{x^4} = \begin{cases} < 0, x \in \left(0; \sqrt[6]{e^5}\right), (\cap) \\ = 0, x = \sqrt[6]{e^5} \\ > 0, x \in \left(\sqrt[6]{e^5}; +\infty\right), (\cup) \end{cases}$$

Итак, $x = e^{5/6} = \sqrt[6]{e^5}$ — точка перегиба, при этом

$$y\left(\sqrt[6]{e^5}\right) = \frac{\ln e^{5/6}}{\left(\sqrt[6]{e^5}\right)^2} = \frac{5}{6 \cdot \sqrt[3]{e^5}}.$$

5. График исследуемой функции представлен на *рис. 12*.

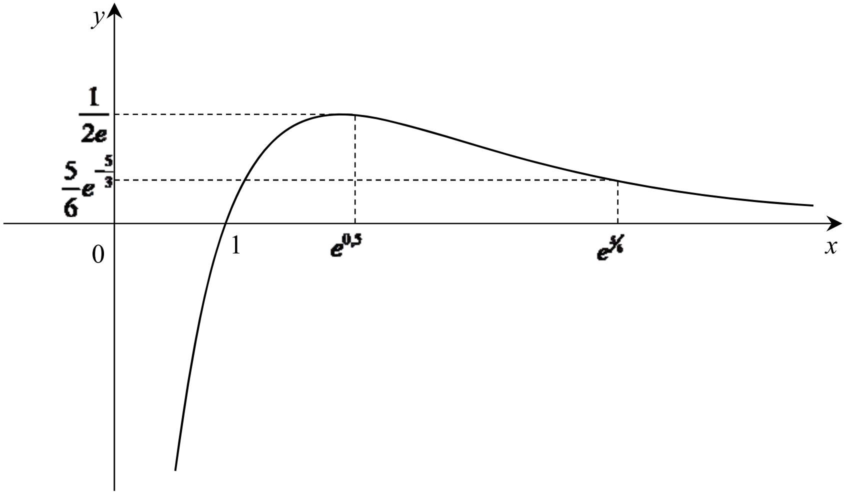

Рис. 12. График функции, представленной в задаче 4

5. Варианты расчетно-графических работ для самостоятельного решения

ВАРИАНТ 1

Задача 1.

А) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3x^2-5x-2}{2x^2-x-6}$; Б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2-3x+1}{3x^3+x+4}$; В) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{arctg}2x}{4x}$;

Г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+7}{2x+5}\right)^{x-3}$; Д) $\lim\limits_{x\to\pi/4}\dfrac{1-\operatorname{tg}x}{\cos 2x}$.

Задача 2.

А) $y=\dfrac{\sqrt{x}\cdot\sin x}{3x^2+1}$; Б) $y=\ln\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}$; В) $y=(\cos x)^{1/x}$.

Задача 3.

$y=x\ln\left(x+e\right),\ x_0=0.$

Задача 4.
$\left(0.98\right)^5$.

Задача 5.
$y=(x-2)^2\cdot e^{-x}$.

ВАРИАНТ 2

Задача 1.
А) $\lim\limits_{x\to-5}\dfrac{2x^2+15x+25}{5-4x-x^2}$; Б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^3-2x+1}{2x^2+x-3}$; В) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos4x}{2\arcsin^2 2x}$;
Г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x+2}{3x-4}\right)^{2-x}$; Д) $\lim\limits_{x\to\pi/6}\dfrac{1-2\sin x}{\cos3x}$.

Задача 2.
А) $y=\dfrac{x\cdot\ln x}{x^2-3}$; Б) $y=\dfrac{1}{3}\sqrt{\mathrm{arctg}\left(x^3\right)}$; В) $y=(\sin x)^{\sqrt[3]{x}}$.

Задача 3.
$y=xe^{x-1}, x_0=1$.

Задача 4.
$\left(0.99\right)^7$.

Задача 5.
$y=\left(x^2-1\right)\cdot e^x$.

ВАРИАНТ 3

Задача 1.
А) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{4x^2+7x+3}{2x^2+x-1}$; Б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3-2x-x^2}{x^3+4x+1}$; В) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\arcsin2x}{4x}$;
Г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{4x+3}{4x-1}\right)^{2x-3}$; Д) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\ln x}{1-x^3}$.

Задача 2.

А) $y=\dfrac{\sqrt{x}\cdot\arcsin x}{4x^3+x}$; Б) $y=\dfrac{1}{5}e^{x^5}$; В) $y=\left(\operatorname{tg}\dfrac{x}{3}\right)^{1/x^2}$.

Задача 3.

$y=\dfrac{\sin x}{1-\cos x},\ x_0=\dfrac{\pi}{2}$.

Задача 4.

$(4.96)^3$.

Задача 5.

$y=\dfrac{x^2+1}{2-x}$.

ВАРИАНТ 4

Задача 1.

А) $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{2x^2-9x+9}{x^2-5x+6}$; Б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-5x+4}{x^3+x+1}$; В) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 3x}{\operatorname{tg}5x}$; Г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+5}{2x-1}\right)^{3-x}$;

Д) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{2x}-1}{\ln(1+2x)}$.

Задача 2.

А) $y=\dfrac{e^x\cdot\arccos x}{3x^6-x^2}$; Б) $y=\dfrac{1}{3}\operatorname{arctg}^3(2x+1)$; В) $y=(\operatorname{ctg}x)^{\sqrt[3]{x}}$.

Задача 3.

$y=\sqrt{x}e^{-x},\ x_0=1$.

Задача 4.

arctg0.96.

Задача 5.

$y=x^2\cdot e^{-x^2}$.

ВАРИАНТ 5

Задача 1.

А) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{5x-x^2-4}{x^2-2x-8}$; Б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3+x-4}{3+x-4x^2}$; В) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{tg}^2 x}{x\cdot\sin 2x}$; Г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{5x-1}{5x+4}\right)^{2x+1}$;

Д) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x\sin x}-\dfrac{1}{x^2}\right)$.

Задача 2.

А) $y=\dfrac{x^3\cdot\log_2 x}{2\sqrt{x}+1}$; Б) $y=\sqrt[3]{\ln(2-x)}$; В) $y=(\sin x)^{\arcsin x}$.

Задача 3.

$y=\mathrm{ctg}\left(\pi/3-x\right), x_0=\pi/6$.

Задача 4.

$\mathrm{tg}3^0$.

Задача 5.

$y=\dfrac{\ln x}{x}$.

ВАРИАНТ 6

Задача 1.

А) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2-2x-8}{2x^2+5x+2}$; Б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3-7x+1}{3x^2+x+3}$; В) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{tg}x-\sin x}{x^3}$;

Г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x-2}{3x-4}\right)^{2x}$; Д) $\lim\limits_{x\to 0+}\left(x^2\cdot\ln x\right)$.

Задача 2.

А) $y=\dfrac{\sqrt[5]{x^2}\cdot 3^x}{x+\ln x}$; Б) $y=\dfrac{1}{\arcsin^2 5x}$; В) $y=(\mathrm{tg}x)^{\mathrm{arctg}x}$.

Задача 3.
$y = 2^{-x} - 2^{-2x}, x_0 = 2.$

Задача 4.
$\cos 88^0.$

Задача 5.
$y = x - \ln x.$

ВАРИАНТ 7

Задача 1.
А) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x^2-2x-1}{x^2-4x+3}$; Б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+5x+4}{2x^3-x+1}$; В) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 3x}{\mathrm{tg}^2 2x}$; Г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{7x+5}{7x+8}\right)^{1-3x}$;
Д) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{e^x-1}\right)$.

Задача 2.
А) $y = \dfrac{e^x\cdot\cos x}{3x+\sqrt{x}}$; Б) $y = \sqrt[3]{\arccos 3x}$; В) $y = (\ln x)^{1/x^3}$.

Задача 3.
$y = \sqrt[3]{x-1}, x_0 = 1.$

Задача 4.
$1/\sqrt{3.99}.$

Задача 5.
$y = \dfrac{2x^2-1}{x}.$

ВАРИАНТ 8

Задача 1.
А) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{6-x-x^2}{3x^2+8x-3}$; Б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3-2x+1}{3x^2+4x+2}$; В) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x}{\arcsin 6x}$;

Г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{4x+`1}{4x-3}\right)^{1-2x}$; Д) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^5}{e^x}$.

Задача 2.

А) $y=\dfrac{x^2\log_3 x}{\sqrt[5]{x^3}+x^3}$; Б) $y=e^{\operatorname{arctg}\frac{x}{5}}$; В) $y=(\cos x)^{\arccos x}$.

Задача 3.

$y=\left(x^3+2x^2\right)\Big/\left(x-1\right)^2, x_0=-2.$

Задача 4.

$\sin\left(13\pi/36\right)$.

Задача 5.

$y=\dfrac{x^3}{x^2-3}$.

ВАРИАНТ 9

Задача 1.

А) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2+2x-8}{8-x^3}$; Б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-3x+4}{2x^3+5x-1}$; В) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 3x\cdot \operatorname{ctg}5x}{4}$;

Г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-2}{x+3}\right)^{4-x}$; Д) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x-e^{-x}}{\ln(1+x)}$.

Задача 2.

А) $y=\dfrac{\sqrt[3]{x^2}\cdot\operatorname{ctg}x}{5x^3+1}$; Б) $y=\dfrac{1}{\ln^5\dfrac{x}{4}}$; В) $y=(\arcsin x)^{\sin x}$.

Задача 3.

$y=\operatorname{arctg}x,\ x_0=1.$

Задача 4.

$\sin 94^0$.

Задача 5.
$y = x^2 \cdot \ln x.$

ВАРИАНТ 10

Задача 1.
А) $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x^2 - 2x - 8}{2x^2 + 5x + 2}$; Б) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{3x^2 + 5x + 4}{2x^3 - x + 1}$; В) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{5x}{\arcsin 7x}$;
Г) $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\dfrac{5x + 4}{5x + 1} \right)^{1 - 2x}$; Д) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - e^{-x}}{2 \ln(1 - x)}$.

Задача 2.
А) $y = \dfrac{\left(x^2 - x\right) \cdot \cos x}{3\sqrt[3]{x} + 1}$; Б) $y = \dfrac{1}{4} \operatorname{ctg}^4 2x$; В) $y = (\arccos x)^{\sin x}$.

Задача 3.
$y = \operatorname{ctg}^2 x,\ x_0 = \pi/4.$

Задача 4.
$\sqrt[4]{84}.$

Задача 5.
$y = x^2 \cdot e^x.$

ВАРИАНТ 11

Задача 1.
А) $\lim\limits_{x \to -5} \dfrac{2x^2 + 15x + 25}{5 - 4x - x^2}$; Б) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{3 - 2x - x^2}{x^3 + 4x + 1}$; В) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin 5x}{\operatorname{tg} 3x}$;
Г) $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\dfrac{5x - 2}{5x + 3} \right)^{2x + 3}$; Д) $\lim\limits_{x \to 0} \left(x^2 \cdot \ln x \right)$.

Задача 2.
А) $y = \dfrac{\sqrt[3]{x} \cdot \arccos x}{3x^4 - x}$; Б) $y = \dfrac{1}{5} e^{3x^5 + 1}$; В) $y = (\operatorname{ctg} x)^{1/x^2}$.

Задача 3.
$y=\left(x^2-2x+2\right)/x^2$, $x_0=2$.

Задача 4.
$\mathrm{ctg}28^0$.

Задача 5.
$y=\dfrac{x}{\ln x}$.

ВАРИАНТ 12

Задача 1.
А) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x^2-2x-1}{x^2-4x+3}$; Б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3-2x+1}{3x^2+4x+2}$; В) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 6x}{x\cdot\sin 3x}$;
Г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-1}{x+2}\right)^{3-x}$; Д) $\lim\limits_{x\to\pi/4}\dfrac{1-\mathrm{tg}x}{\cos 2x}$.

Задача 2.
А) $y=\dfrac{e^x\cdot\arcsin x}{6x^3-2x}$; Б) $y=\dfrac{1}{2}\mathrm{arcctg}^2 3x$; В) $y=(\mathrm{tg}x)^{\sqrt[5]{x^3}}$.

Задача 3.
$y=\cos^2 x$, $x_0=\pi/4$.

Задача 4.
lg998.

Задача 5.
$y=\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{2}{x^2}$.

ВАРИАНТ 13

Задача 1.
А) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{4x^2+7x+3}{2x^2+x-1}$; Б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-5x+4}{x^3+x+1}$; В) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{tg}^2 x}{x\cdot\sin 2x}$;

Г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x-2}{3x-5}\right)^{2x-1}$; Д) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{e^x-1}\right)$.

Задача 2.

А) $y=\dfrac{x^2\cdot\log_3 x}{2\sqrt[3]{x}+3}$; Б) $y=\sqrt[3]{\ln^2 x}$; В) $y=(\cos x)^{\arcsin x}$.

Задача 3.

$y=\sin x+\cos x,\ x_0=\pi/4$.

Задача 4.

$\mathrm{tg}153^0$.

Задача 5.

$y=\dfrac{x^2-1}{x^3}$.

ВАРИАНТ 14

Задача 1.

А) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{6-x-x^2}{3x^2+8x-3}$; Б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5-2x-3x^2}{x^3+x+3}$; В) $\lim\limits_{x\to 0}(\sin 5x\cdot \mathrm{ctg}3x)$;

Г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+3}{2x+5}\right)^{x+2}$; Д) $\lim\limits_{x\to \pi/6}\dfrac{1-2\sin x}{\cos 3x}$.

Задача 2.

А) $y=\dfrac{\sqrt[5]{x^4}\cdot 2^x}{3x^2+\ln x}$; Б) $y=\dfrac{1}{\arccos^2 3x}$; В) $y=(\mathrm{ctg}x)^{\mathrm{arctg}x}$.

Задача 3.

$y=2\cos x,\ x_0=\pi/4$.

Задача 4.

$\mathrm{ctg}88^0$.

Задача 5.

$$y=\frac{x^2}{x-1}.$$

ВАРИАНТ 15

Задача 1.

А) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{2x^2-9x-9}{x^2-5x+6}$; Б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3+x-4}{3+x-4x^2}$; В) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{tg}x-\sin x}{x^3}$;

Г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{7x+1}{7x+4}\right)^{2-3x}$; Д) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^5}{e^x}$.

Задача 2.

А) $y=\dfrac{e^x\cdot\sin x}{3x-\sqrt{x}}$; Б) $y=\sqrt[3]{\arcsin\dfrac{x}{2}}$; В) $y=(\ln x)^{1/x^2}$.

Задача 3.

$y=2\cos x,\ x_0=\pi/4.$

Задача 4.

$e^{0.02}$.

Задача 5.

$$y=\frac{x^2+1}{x^2-4x+3}.$$

ВАРИАНТ 16

Задача 1.

А) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-1}{5x^2-4x-1}$; Б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-3x+4}{2x^3+5x-1}$; В) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{arctg}7x}{5x}$;

Г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x+1}{3x-1}\right)^{3-x}$; Д) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln x}{1-x^3}$.

Задача 2.

А) $y=\dfrac{x^3\lg x}{\sqrt[4]{x^3}+2x}$; Б) $y=e^{\operatorname{arcctg}5x}$; В) $y=(\sin x)^{\arccos x}$.

Задача 3.

$y=x^3-3x+2,\, x_0=2.$

Задача 4.

$\mathrm{tg}48^0.$

Задача 5.

$y=(x-1)\cdot e^{-x}.$

ВАРИАНТ 17

Задача 1.

А) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{5x-x^2-4}{x^2-2x-8}$; Б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3-7x+1}{3x^2+x+3}$; В) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 2x}{\mathrm{tg}^2 3x}$; Г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{4x+2}{4x+3}\right)^{3-2x}$;

Д) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1+\ln x}{e^{x-1}-1}$.

Задача 2.

А) $y=\dfrac{\left(3x^2-x\right)\sin x}{\ln x}$; Б) $y=\mathrm{ctg}\dfrac{1}{(3x-1)^2}$; В) $y=\left(\sqrt[3]{x^2}\right)^{\arcsin x}$.

Задача 3.

$y=x^3+2x^2-4x-3,\, x_0=-2.$

Задача 4.

$\sqrt{24.8}.$

Задача 5.

$y=(2x+1)\cdot e^{-x^2}.$

ВАРИАНТ 18

Задача 1.

А) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{5x-x^2-4}{x^2+2x-3}$; Б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2-5x+1}{5x^3+x+4}$; В) $\lim\limits_{x\to 0}(\mathrm{tg}5x\cdot\mathrm{ctg}3x)$;

Г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x+2}{3x-2}\right)^{1-2x}$; Д) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{5^{x-1}-4^{x-1}}{x^2-x}$.

Задача 2.

А) $y=\dfrac{\sqrt{x}\cdot\cos x}{3x^2+5}$; Б) $y=\lg\sin 3x$; В) $y=(\cos 2x)^{x^3-x}$.

Задача 3.

$y=\ln x,\ x_0=1.$

Задача 4.

$\sin 66^0$.

Задача 5.

$y=e^{-x^2+x}$.

ВАРИАНТ 19

Задача 1.

А) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+2x-8}{8-x^3}$; Б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5-2x-3x^2}{x^3+x+3}$; В) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{7x}{\arcsin 5x}$;

Г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{7x-3}{7x+1}\right)^{2-3x}$; Д) $\lim\limits_{x\to 0}\left(x^2\cdot\ln x\right)$.

Задача 2.

А) $y=\dfrac{\sqrt{x}\cdot\ln x}{6x^3+8}$; Б) $y=7\mathrm{arctg}\sqrt[7]{x}$; В) $y=(\sin x)^{1/x^7}$.

Задача 3.

$y=x^2e^{-x},\ x_0=0.$

Задача 4.
$\arcsin 0.52.$

Задача 5.
$y=\dfrac{x^2-1}{x+2}.$

ВАРИАНТ 20

Задача 1.
А) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+2x-8}{8-x^3}$; Б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2+3x-2}{1-2x-x^3}$; В) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 4x}{3\arcsin^2 3x}$;
Г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{4x-1}{4x+1}\right)^{3x-2}$; Д) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-1}{\ln(1+2x)}$.

Задача 2.
А) $y=\dfrac{\sqrt[4]{x^3}\cdot \operatorname{tg}x}{3x^5+1}$; Б) $y=\dfrac{1}{\ln^3(2x+1)}$; В) $y=(\arccos x)^{\sin x}$.

Задача 3.
$y=\sqrt{4x-3-x^2},\ x_0=3/2.$

Задача 4.
$\sqrt[3]{26}.$

Задача 5.
$y=\dfrac{x^3}{x^2+1}.$

ВАРИАНТ 21

Задача 1.
А) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{5x-x^2-4}{x^2-2x-8}$; Б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-5x+4}{x^3+x+1}$; В) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 8x}{5x}$;
Г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x+5}{3x-2}\right)^{2-x}$; Д) $\lim\limits_{x\to\pi/4}\dfrac{1-\operatorname{tg}x}{\cos 2x}$.

Задача 2.

А) $y = \dfrac{\sqrt[4]{x} \cdot \arcsin x}{7x^5 + 4x + 1}$; Б) $y = 5e^{\sqrt[5]{2x+1}}$; В) $y = (\mathrm{tg}x)^{1/x^5}$.

Задача 3.

$y = \sqrt{3x^2 + 2x},\ x_0 = 2.$

Задача 4.

$\mathrm{tg}58^0$.

Задача 5.

$y = \dfrac{x^2 - 4}{x}.$

ВАРИАНТ 22

Задача 1.

А) $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{x^3 - 1}{5x^2 - 4x - 1}$; Б) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x^3 - 2x + 1}{3x^2 + 4x + 2}$; В) $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\sin^2 8x}{\mathrm{tg}^2 9x}$; Г) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{3x - 2}{3x - 5} \right)^{4x+1}$;

Д) $\lim\limits_{x\to0} \left(\dfrac{1}{x \cdot \sin x} - \dfrac{1}{x^2} \right)$.

Задача 2.

А) $y = \dfrac{e^x \cdot \mathrm{arctg}x}{2x^5 - x^3}$; Б) $y = 5\sqrt[3]{\arcsin 5x}$; В) $y = (\mathrm{ctg}x)^{1/x^3}$.

Задача 3.

$y = xe^{-x},\ x_0 = 0.$

Задача 4.

$\lg 10.21$.

Задача 5.

$y = \dfrac{e^x}{x}.$

ВАРИАНТ 23

Задача 1.

А) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{2x^2-9x+9}{x^2-5x+6}$; Б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3-2x-x^2}{x^3+4x-1}$; В) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 4x}{2\arcsin^2 2x}$;

Г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-3}{2x+3}\right)^{x+5}$; Д) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}}{\ln(1+x)}$.

Задача 2.

А) $y=\dfrac{3x^7\cdot\lg x}{5\sqrt[5]{x^3}+7}$; Б) $y=\sqrt[3]{\ln^2\left(2-\dfrac{x}{3}\right)}$; В) $y=(\mathrm{tg}x)^{\arcsin x}$.

Задача 3.

$y=\sqrt[3]{ctgx},\ x_0=\pi/4$.

Задача 4.

arctg1.058.

Задача 5.

$y=\dfrac{x^2}{x^2-1}$.

ВАРИАНТ 24

Задача 1.

А) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{6-x-x^2}{3x^2+8x-3}$; Б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+5x+4}{2x^3-x+1}$; В) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{tg}x-\sin x}{x^3}$;

Г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{5x+2}{5x-2}\right)^{2x+3}$; Д) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-1}{\ln(1+2x)}$.

Задача 2.

А) $y=\dfrac{\sqrt[4]{x^5}\cdot 4^x}{7x^8+2\ln x}$; Б) $y=\dfrac{1}{\arccos^5\dfrac{x}{5}}$; В) $y=(\cos x)^{\mathrm{arctg}x}$.

Задача 3.

$y = \left(x^2 - 1\right)\big/ x,\ x_0 = -2.$

Задача 4.

$(0.99)^4.$

Задача 5.

$y = \dfrac{x^3}{x^2 - 4}.$

ВАРИАНТ 25

Задача 1.

А) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3x^2 - 5x - 2}{2x^2 - x - 6}$; Б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^3 - 3x + 1}{x^2 + x + 3}$; В) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 2x}{4x}$;

Г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+5}{2x-1}\right)^{3-x}$; Д) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x\cdot\sin x} - \dfrac{1}{x^2}\right)$.

Задача 2.

А) $y = \dfrac{\sqrt[7]{x^2}\cdot 3^x}{x + \ln x}$; Б) $y = \sqrt[3]{\arccos 3x}$; В) $y = (\cos x)^{\arcsin x}$.

Задача 3.

$y = \mathrm{tg}2x,\ x_0 = 0.$

Задача 4.

$\mathrm{tg}44^0$.

Задача 5.

$y = 2x - \ln x.$

ВАРИАНТ 26

Задача 1.

А) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2 - 2x - 8}{2x^2 + 5x + 2}$; Б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2 + 5x + 4}{2x^3 - x + 1}$; В) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{10x}{3\arcsin 5x}$;

Г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{5x-1}{5x+3}\right)^{4-3x}$; Д) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x}-e^{-x}}{\ln(x+1)}$.

Задача 2.

А) $y=\dfrac{\sqrt{x}\cdot\sin x}{5x^{3}-1}$; Б) $y=\dfrac{1}{4}\sqrt{\operatorname{arctg}\left(x^{8}\right)}$; В) $y=\left(\operatorname{tg}\dfrac{x}{5}\right)^{1/x^{3}}$.

Задача 3.

$y=\arcsin\dfrac{x-1}{2},\ x_0=1.$

Задача 4.

$\sin 2^{0}$.

Задача 5.

$y=x^{2}\cdot e^{-x^{2}}$.

ВАРИАНТ 27

Задача 1.

А) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3x^{2}-5x-2}{2x^{2}-x-6}$; Б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^{2}-5x+1}{3x^{3}+8x+2}$; В) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 7x}{\operatorname{tg}\dfrac{x}{3}}$; Г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-4}{x+7}\right)^{2-x}$;

Д) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{e^{x}-1}\right)$.

Задача 2.

А) $y=\dfrac{e^{x}\cdot\arccos x}{4x^{6}-x^{3}}$; Б) $y=\sqrt[3]{\ln(3-x)}$; В) $y=(\ln x)^{1/x^{3}}$.

Задача 3.

$y=e^{1-x^{2}},\ x_0=1.$

Задача 4.

$\sin 92^{0}$.

Задача 5.

$y=\dfrac{2x}{\ln x}.$

ВАРИАНТ 28

Задача 1.

А) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-1}{5x^2-4x-1}$; Б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5-2x-3x^2}{x^3+x+3}$; В) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 6x}{x\cdot\sin 3x}$;

Г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{5x+3}{5x+2}\right)^{3-2x}$; Д) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1+\ln x}{e^{x-1}-1}$.

Задача 2.

А) $y=\dfrac{\left(2x^2+x\right)\cdot\cos x}{\lg x}$; Б) $y=\operatorname{ctg}\dfrac{1}{x^2}$; В) $y=\left(\sqrt[3]{x}\right)^{\arccos x}$.

Задача 3.

$y=\arccos 3x,\ x_0=0.$

Задача 4.

$\cos 88^0.$

Задача 5.

$y=\ln x-x.$

ВАРИАНТ 29

Задача 1.

А) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3x^2-5x-2}{2x^2-x-6}$; Б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^3-2x+1}{2x^2+x-3}$; В) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 5x}{6x}$;

Г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+4}{2x-1}\right)^{3-x}$; Д) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{x\sin x}\right)$.

Задача 2.

А) $y = \dfrac{\sqrt[3]{x} \cdot \cos x}{2x^3 - 1}$; Б) $y = \operatorname{tg} \ln \dfrac{x}{3}$; В) $y = (\sin x)^{1/\sqrt{x}}$.

Задача 3.

$y = x^2 - 7x + 3,\ x_0 = 0.$

Задача 4.

$\operatorname{ctg} 59^0.$

Задача 5.

$y = \dfrac{\ln 2x}{x}.$

ВАРИАНТ 30

Задача 1.

А) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{5x^2 - x - 18}{2x^2 - x - 6}$; Б) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{2x^2 - 3x + 1}{3x^3 + x + 4}$; В) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{arctg} 2x}{4x}$;

Г) $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\dfrac{2x + 7}{2x + 5} \right)^{x-3}$; Д) $\lim\limits_{x \to \pi/4} \dfrac{1 - \operatorname{tg} x}{\cos 2x}$.

Задача 2.

А) $y = \dfrac{\sqrt{x} \cdot \sin x}{3x^2 + 1}$; Б) $y = \ln \operatorname{tg} \dfrac{x}{2}$; В) $y = (\cos x)^{1/x}$.

Задача 3.

$y = x - x^2,\ x_0 = 1.$

Задача 4.

$\sqrt[4]{82}.$

Задача 3.

$y = (x - 1)^2 \cdot e^{-x}.$

ТЕСТЫ

СЕКЦИЯ: Математический анализ. Предел последовательности и предел функции

ЗАДАНИЕ 1. Укажите последовательности, сходящиеся к числу 3:

1) $\dfrac{3n-2}{n+5}$;

2) $\dfrac{3n}{n+5}\sin\left(\dfrac{2}{n+5}\right)$;

3) $\dfrac{3n}{n+6}\cos\left(\dfrac{2}{n+5}\right)$;

4) $n\left(\sqrt{n+2}-\sqrt{n}\right)$.

ЗАДАНИЕ 2. Найдите предел последовательности:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n+1}{3n+5}\right)^{2n}.$$

ЗАДАНИЕ 3. Найдите предел последовательности:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{7-3\cos 7n}{\sqrt{n+2}}\right).$$

ЗАДАНИЕ 4. Укажите значение предела последовательности:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)\sin 2n}{n^2}.$$

ЗАДАНИЕ 5. Укажите значение предела последовательности:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{2n}.$$

ЗАДАНИЕ 6. Выберите значение предела последовательности:

$$\lim_{n\to\infty} n\,\mathrm{tg}\frac{\pi}{n}.$$

ЗАДАНИЕ 7. Найдите предел последовательности:

$$\lim_{n\to\infty} n\sin\frac{\pi}{n^2}.$$

ЗАДАНИЕ8. Найдите предел функции:

$$\lim_{x\to 1}\left(x^2\cos\pi x\right).$$

ЗАДАНИЕ 9. Найдите предел функции:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{2^x}{x-1}\right).$$

ЗАДАНИЕ 10. Найдите предел функции:

$$\lim_{x\to 1}\frac{\mathrm{tg}\pi x}{x+2}.$$

ЗАДАНИЕ 11. Найдите предел функции:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{x}{\cos\pi x}\right).$$

ЗАДАНИЕ 12. Найдите предел функции:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{tg}\pi x}{2x}.$$

ЗАДАНИЕ 13. Найдите предел функции:

$$\lim_{x\to 0}(\pi x\mathrm{ctg}2\pi x).$$

ЗАДАНИЕ 14. Найдите предел последовательности:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sin 2n\cdot\sin\frac{\sqrt{n}}{n+1}\right).$$

ЗАДАНИЕ 15. Найдите предел функции:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{x-1}{\cos 2\pi x}\right).$$

СЕКЦИЯ: Математический анализ. Непрерывность. Классификация точек разрыва.

ЗАДАНИЕ 1. Отметьте функции, непрерывные в точке $x=2$:

1) $y=\mathrm{tg}\pi x$;

2) $y=\dfrac{x^2-x-2}{x-2}$;

3) $y=\arcsin\left(\dfrac{x-2}{2}\right)$;

4) $y=\mathrm{ctg}2\pi x$.

ЗАДАНИЕ 2. Укажите функции, которые имеют разрыв в точке $x=2$:

1) $y=\dfrac{x^2-x-2}{x-2}$;

2) $y=\mathrm{tg}\pi x$;

3) $y=\dfrac{x+2}{\cos(x-2)}$;

4) $y=\begin{cases}\dfrac{\sin(x-2)}{x-2}, x>2\\ 2, x\le 2\end{cases}$.

ЗАДАНИЕ 3. Укажите величину скачка функции $y=\dfrac{5|x-1|}{x-1}$ в точке разрыва $x=1$.

ЗАДАНИЕ 4. Отметьте функции, непрерывные на всей числовой прямой:

1) $y=x+\mathrm{arcctg}x$;

2) $y=5\ln(x-2)$;

3) $y=\sqrt{5\sin 2x+3}$;

4) $y=\sqrt{5-3\cos x}$.

ЗАДАНИЕ 5. Запишите величину скачка функции $y=\dfrac{|x-3|}{2(x-3)}$ в точке разрыва $x=3$.

ЗАДАНИЕ 6. Запишите величину скачка функции $y=\begin{cases} 3^x, x\geq 0 \\ 2\cos x, x<0 \end{cases}$ в точке разрыва.

ЗАДАНИЕ 7. Запишите величину скачка функции $y=\begin{cases} \ln(x+1), x>0 \\ x^2-2, x<0 \end{cases}$ в точке $x=0$.

ЗАДАНИЕ 8. Укажите функции, которые имеют разрыв в точке $x=0$:

1) $y=\dfrac{\sin x}{|\cos x|}$;

2) $y=\dfrac{\sin 2x}{x+2}$;

3) $y=\dfrac{\sin x}{|x|}$;

4) $y=\dfrac{\mathrm{tg}x}{x}$.

ЗАДАНИЕ 9. Отметьте функции, непрерывные на всей числовой прямой:

1) $y=\ln\left(x^2+1\right)$;

2) $y=\sqrt{2-s\,\mathrm{in}\,3x}$;

3) $y=\sqrt{2+3\cos x}$;

4) $y=\ln(x+1)$.

ЗАДАНИЕ 10. Укажите величину скачка функции $y=\begin{cases}\sin\frac{\pi x}{4}, x>1\\ \cos\frac{\pi x}{4}, x<1\end{cases}$ в точке $x=1$.

ЗАДАНИЕ 11. Укажите величину скачка функции $y=2|x|\mathrm{ctg}x$ в точке $x=0$.

ЗАДАНИЕ 12. Укажите величину скачка функции $y=\begin{cases}3x^2, x>1\\ \sin\pi x, x<1\end{cases}$ в точке $x=1$.

ЗАДАНИЕ 13. Отметьте функции, непрерывные на всей числовой прямой:

1) $y=\dfrac{\sin x}{2^x}$;

2) $y=\sqrt{2-2^x}$;

3) $y=\dfrac{\cos x}{\ln\left(x^2+2\right)}$;

4) $y=\dfrac{\mathrm{ctg}\pi\left(x^2+2\right)}{x^2+2}$.

ЗАДАНИЕ 14. Укажите величину скачка функции $y=\mathrm{arctg}\dfrac{2}{x}$ в точке $x=0$.

ЗАДАНИЕ 15. Укажите величину скачка функции $y=2\mathrm{arcctg}\dfrac{3}{x}$ в точке $x=0$.

СЕКЦИЯ: Математический анализ. Производная. Монотонность и выпуклость.

ЗАДАНИЕ 1. Найдите абсциссу точки максимума функции $y = x^5 - 15x^3 + 5.$

ЗАДАНИЕ 2. Найдите производную функции $y = \cos\frac{\pi x}{4}\ln(1+x)$ в точке $x = 0.$

ЗАДАНИЕ 3. Под каким углом кривая $y = e^{x-1} - 1$ пересекает ось абсцисс?

ЗАДАНИЕ 4. Проволоку длиной 12 см согнули в виде прямоугольника. Укажите наибольшую возможную площадь прямоугольника (в см^2).

ЗАДАНИЕ 5. Укажите точки экстремума функции, если известно, что ее производная имеет вид $y'(x) = 5(x-2)(x+1)^2 x^3.$

ЗАДАНИЕ 6. Найдите точки перегиба функции $y = f(x),$ если ее вторая производная имеет вид $f''(x) = -3(x-1)^2 x^3 (x+2).$

ЗАДАНИЕ 7. Укажите наибольшее значение функции $y = 3\left|x-3\right|$ на отрезке [2;5].

ЗАДАНИЕ 8. Найдите вторую производную от функции в точке $x = 1,$ если $y(x) = x^2 \ln x.$

ЗАДАНИЕ 9. Найдите первую производную от функции $y(x) = e^{\mathrm{tg}\pi x}$ в точке $x = 0.$

ЗАДАНИЕ 10. Найдите точки экстремума функции $y(x) = \left|x\right| x^2.$

ЗАДАНИЕ 11. Найдите первую производную от функции $y(x) = \sin\left(\pi x^2\right)$ в точке $x = 1.$

ЗАДАНИЕ 12. Найдите первую производную от функции $y(x) = \left(x^2 - 3x\right)^5$ в точке $x = 1.$

ЗАДАНИЕ 13. Найдите вторую производную от функции $y(x) = \sin\left(\pi x^2\right)$ в точке $x = 1.$

ЗАДАНИЕ 14. Найдите точку максимума функции $y(x) = x^3 e^{-x}.$

ЗАДАНИЕ 15. Найдите точку минимума функции $y(x) = \left(x^2 - 4x\right)^5.$

СЕКЦИЯ: Математический анализ. Асимптоты.

ЗАДАНИЕ 1. Выберите асимптоты графика функции $y = \dfrac{x}{x-2}$.

1) $y = x$
2) $x = 2;\ y = 1$
3) $y = 1$
4) $x = 2;\ y = 0.$

ЗАДАНИЕ 2. Выберите асимптоты графика функции $y = \dfrac{x^2+1}{x-2}$.

1) $y = x - 2$
2) $x = 2;\ y = x + 2$
3) $y = 1$
4) $x = 2;\ y = 0.$

ЗАДАНИЕ 3. Выберите асимптоты графика функции $y = \dfrac{x+2}{x^2-1}$.

1) $y = x;$
2) $x = \pm 1;\ y = 0;$
3) $y = \pm 1;$
4) $x = 2;\ y = 0..$

ЗАДАНИЕ 4. Выберите асимптоты графика функции $y = \dfrac{x^2+2}{x+1}$.

1) $x = -1;$
2) $x = -1;\ y = x - 1;$
3) $x = -1;\ y = 1;$
4) $x = -1;\ y = 0.$

ЗАДАНИЕ 5. Выберите асимптоты графика функции $y = \dfrac{x+1}{x^2-4}$.

1) $x = \pm 2;$
2) $x = \pm 2;\ y = 0;$

3) $x = \pm 2;\ y = 1;$

4) $x = \pm 2;\ y = x.$

ЗАДАНИЕ 6. Выберите асимптоты графика функции $y = 2^x - 1$ из перечисленных ниже:

1) $y = 1;$

2) $x = -1;$

3) $y = -1;$

4) $x = -1;\ y = 1.$

ЗАДАНИЕ 7. Выберите асимптоты графика функции $y = 3^{-x} + 1$ из перечисленных ниже:

1) $x = 1;$

2) $y = 1;$

3) $y = -1;$

4) $x = -1.$

ЗАДАНИЕ 8. Выберите асимптоты графика функции $y = 2^{-x} + 2$ из перечисленных ниже:

1) $y = -2;$

2) $y = 2;$

3) $x = 0;$

4) $x = -1.$

ЗАДАНИЕ 9. Выберите асимптоты графика функции $y = 3^x - 4$ из перечисленных ниже:

1) $y = -4;$

2) $y = 0;$

3) $x = 1;$

4) $x = \log_3 4.$

ЗАДАНИЕ 10. Выберите асимптоты графика функции $y = \frac{e^{-2x}}{x+1}$ из перечисленных ниже:

1) $x = -1$;
2) $x = -1$; $y = 1$;
3) $x = -1$; $y = 0$;
4) $x = -1$; $y = -1$.

ЗАДАНИЕ 11. Запишите асимптоты графика функции $y = \frac{x}{\ln x}$.

1) $y = x$;
2) $x = 1$;
3) $x = 1$; $y = 1$;
4) $x = 1$; $y = 0$.

ЗАДАНИЕ 12. Укажите асимптоты графика функции $y = \frac{x^2}{x-1}$.

1) $x = 1$;
2) $x = 1$; $y = x + 1$;
3) $x = 1$; $y = 1$; ;
4) $x = 1$; $y = 0$.

ЗАДАНИЕ 13. Укажите асимптоты графика функции $y = \frac{x^3}{x^2-4}$.

1) $x = \pm 2$;
2) $x = \pm 2$; $y = x$;
3) $x = \pm 2$; $y = 1$;
4) $x = \pm 2$; $y = 0$.

ЗАДАНИЕ 14. Укажите асимптоты графика функции $y = \frac{2x^3}{x^2-1}$.

1) $x = \pm 1$;
2) $x = \pm 1$; $y = 2x$;
3) $x = \pm 1$; $y = 1$;

4) $x=\pm 1;\ y=0.$

ЗАДАНИЕ 15. Укажите асимптоты графика функции $y=\dfrac{-3x^3}{x^2-1}.$

1) $x=\pm 1;$

2) $x=\pm 1;\ y=-3x;$

3) $x=\pm 1;\ y=3;$

4) $x=\pm 1;\ y=x.$

Ответы к тестовым заданиям

СЕКЦИЯ: Математический анализ. Предел последовательности и предел функции.

ЗАДАНИЕ 1.

1) $\dfrac{3n-2}{n+5};$

3) $\dfrac{3n}{n+6}\cos\left(\dfrac{2}{n+5}\right).$

ЗАДАНИЕ 2. 0.
ЗАДАНИЕ 3. 0.
ЗАДАНИЕ 4. 0.
ЗАДАНИЕ 5. 1.
ЗАДАНИЕ 6. 2.
ЗАДАНИЕ 7. 0.
ЗАДАНИЕ 8. –1.
ЗАДАНИЕ 9. –1.
ЗАДАНИЕ 10. 0.
ЗАДАНИЕ 11. 0.
ЗАДАНИЕ 12. 3.
ЗАДАНИЕ 13. 4.
ЗАДАНИЕ 14. 0.
ЗАДАНИЕ 15. –1.

СЕКЦИЯ: Математический анализ. Непрерывность. Классификация точек разрыва.

ЗАДАНИЕ 1.

1) $y=\operatorname{tg}\pi x;$

3) $y = \arcsin\left(\dfrac{x-2}{2}\right)$.

ЗАДАНИЕ 2.

1) $y = \dfrac{x^2 - x - 2}{x-2}$;

4) $y = \begin{cases} \dfrac{\sin(x-2)}{x-2}, x > 2 \\ 2, x \le 2 \end{cases}$.

ЗАДАНИЕ 3. 10.

ЗАДАНИЕ 4.

1) $y = x + \operatorname{arcctg} x$;

4) $y = \sqrt{5 - 3\cos x}$.

ЗАДАНИЕ 5. 1.

ЗАДАНИЕ 6. –1.

ЗАДАНИЕ 7. 2.

ЗАДАНИЕ 8.

3) $y = \dfrac{\sin x}{|x|}$;

4) $y = \dfrac{\operatorname{tg} x}{x}$.

ЗАДАНИЕ 9.

1) $y = \ln\left(x^2 + 1\right)$;

2) $y = \sqrt{2 - \sin 3x}$.

ЗАДАНИЕ 10. 0.

ЗАДАНИЕ 11. 4.

ЗАДАНИЕ 12. 3.

ЗАДАНИЕ13.

1) $y = \dfrac{\sin x}{2^x}$;

3) $y = \dfrac{\cos x}{\ln\left(x^2 + 2\right)}$.

ЗАДАНИЕ 14. π.

ЗАДАНИЕ 15. -2π.

СЕКЦИЯ: Математический анализ. Производная. Монотонность и выпуклость.

ЗАДАНИЕ 1. –3.
ЗАДАНИЕ 2. 1.
ЗАДАНИЕ 3. 45°.
ЗАДАНИЕ 4. 9.
ЗАДАНИЕ 5. 2;0.
ЗАДАНИЕ 6. $x=0; x=-2$.
ЗАДАНИЕ 7. 6.
ЗАДАНИЕ 8. 3.
ЗАДАНИЕ 9. π.
ЗАДАНИЕ 10. 0.
ЗАДАНИЕ 11. -2π.
ЗАДАНИЕ 12. –80.
ЗАДАНИЕ 13. -2π.
ЗАДАНИЕ 14. 3.
ЗАДАНИЕ 15. 2.

СЕКЦИЯ: Математический анализ. Асимптоты.

ЗАДАНИЕ 1.
2) $x=2; y=1$.
ЗАДАНИЕ 2.
2) $x=2; y=x+2$.
ЗАДАНИЕ 3.
2) $x=\pm 1; y=0$.
ЗАДАНИЕ 4.
2) $x=-1; y=x-1$.
ЗАДАНИЕ 5.
2) $x=\pm 2; y=0$.
ЗАДАНИЕ 6.
3) $y=-1$.
ЗАДАНИЕ 7.
2) $y=1$.
ЗАДАНИЕ 8.
2) $y=2$.

ЗАДАНИЕ 9.
1) $y = -4$.
ЗАДАНИЕ 10.
3) $x = -1$; $y = 0$.
ЗАДАНИЕ 11.
2) $x = 1$.
ЗАДАНИЕ 12.
2) $x = 1$; $y = x + 1$.
ЗАДАНИЕ 13.
2) $x = \pm 2$; $y = x$.
ЗАДАНИЕ 14.
2) $x = \pm 1$; $y = 2x$.
ЗАДАНИЕ 15.
2) $x = \pm 1$; $y = -3x$.

Литература

1. *Карасев В.А., Левшина Г.Д.* Математический анализ. Часть 1. Дифференциальное исчисление. – М.: Илекса, 2011. – 296 с.

2. *Дорофеева А.В.* Высшая математика для гуманитарных направлений. Учебное пособие. – М.: Юрайт, 2012. – 400 с.

3. *Дорофеева А.В*. Высшая математика для гуманитарных направлений. Сборник задач. – М.: Юрайт, 2013. – 175 с.

4. *Павлушков В.М.* и др. Основы высшей математики и математической статистики. Учебник. – М.: ГЕОТАР, 2012. – 432 с.

Содержание

Учебное издание

Вагид Ахмедович **Кадымов,**
Руслан Эльдар **Ахмедов**

ФУНКЦИЯ ОДНОЙ НЕЗАВИСИМОЙ ПЕРЕМЕННОЙ. ТЕОРИЯ ПРЕДЕЛОВ. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

Учебно-методическое пособие

Редактор/корректор
- Ю.Ф. Кравчинская
Технический редактор
- К.А. Антонов
Компьютерная верстка
- К.А. Антонов

Подписано в печать 10.10.2017. Формат 60×84 $^{1}/_{16}$.
Бумага офисная. Гарнитура *Times New Roman*. Печ. лист 4,5.
Тираж 46 экз. Заказ № 35.

Московский государственный гуманитарно-экономический университет
107150, Москва, ул. Лосиноостровская, д. 49.
Отпечатано в типографии МГГЭУ по технологии CtP.