МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

В.А. Кадымов

Часть 5

ЧИСЛОВЫЕ И ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ РЯДЫ. ПРИБЛИЖЕННЫЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ С ПОМОЩЬЮ РЯДОВ

Учебно-методическое пособие

Москва
2019

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Московский государственный гуманитарно-экономический университет

В.А. Кадымов

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Часть 5

ЧИСЛОВЫЕ И ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ РЯДЫ. ПРИБЛИЖЕННЫЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ С ПОМОЩЬЮ РЯДОВ

Учебно-методическое пособие

Москва
2019

УДК 51
ББК 22.143
К 13

Рецензент:

Л.А. Уварова, д-р физ.-мат. наук, зав. кафедрой прикладной математики ФГБОУ ВО МГТУ Станкин

В.А. Кадымов
К 13 Математический анализ. Ч. 5: Числовые и функциональные ряды. Приближенные вычисления с помощью рядов. – М.: МГГЭУ, 2019. – 92 с.

Учебное пособие охватывает один из основных разделов математического анализа — «Числовые и функциональные ряды». Элементы теории сопровождаются примерами с подробными решениями. Приводятся тесты для закрепления теоретического и практического материалов. В заключительной части представлены варианты контрольных заданий для самостоятельной работы. Пособие направлено в помощь студентам для более глубокого понимания и усвоения материала, а так же для успешной сдачи экзаменов.

Учебное пособие рекомендуется для студентов МГГЭУ, обучающихся по направлениям подготовки «Прикладная математика и информатика», «Экономика».

Печатается в авторской редакции.

ISBN 978-5-9799-0126-8

1. ЧИСЛОВЫЕ РЯДЫ. ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА. ПРИЗНАКИ СХОДИМОСТИ

1.1. Основные понятия

Определение 1. Выражение вида

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots, \tag{1.1}$$

где $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$ — последовательность чисел или функций, называется рядом.

Слагаемые $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$ называются членами ряда, а u_n — общим членом ряда.

Если все члены ряда являются числами, то ряд называется ***числовым***, а если все члены ряда — функции, то ***функциональным***.

Члены ряда нумеруют с помощью натуральных чисел, начиная с единицы $(n \in N)$, либо с помощью целых чисел, начиная с некоторого целого. Например, ряд может задаваться как $\sum\limits_{n=-3}^{\infty} u_n$, либо $\sum\limits_{n=0}^{\infty} u_n$.

Определение 2. Ряд (1.1) называется ***знакоположительным*** (строго положительным), если $u_n \geq 0, \forall n \in N \left(u_n > 0, \forall n \in N\right)$.

Ряд (1.1) называется ***знакопеременным***, если его члены имеют произвольные знаки. Если говорить более строго, то знакопеременный ряд должен иметь бесконечное число как положительных членов, так и отрицательных. Частным случаем знакопеременных рядов являются ***знакочередующиеся*** ряды, члены которых поочередно меняют знак.

Определение 3. Сумма первых n членов ряда называется ***n-ой частичной суммой ряда*** и обозначается

$$S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n = \sum_{k=1}^{n} u_k. \tag{1.2}$$

Если частичные суммы расположить в порядке возрастания номера n, то получим последовательность частичных сумм ряда $\{S_n\} = S_1, S_2, S_3, \ldots$

Определение 4. Ряд (1.1) называется ***сходящимся***, если существует конечный предел $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$ последовательности его частичных сумм. Символически это обозначают: $S = \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$. Число S называют суммой ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$. Ряд (1.1) называют расходящимся, если $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty$, либо не существует.

Свойства сходящихся рядов

1. Если сходится ряд, то сходится и любой из его остатков $R_n = \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} u_k$, и наоборот. Иначе говоря, отбрасывание или добавление конечного числа начальных членов ряда не меняет его сходимости или расходимости.

2. Если члены сходящегося ряда умножить на произвольное действительное число λ, то сходимость ряда не изменится, а его сумма увеличится в λ раз.

3. Два сходящихся ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n = S_1$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n = S_2$ можно почленно складывать или вычитать, при этом ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (u_n \pm v_n)$ тоже сходятся и их суммы равны $S_1 \pm S_2$.

4. Если в сходящемся ряде отбросить конечное число членов, или к сходящемуся ряду добавить конечное число членов, то полученные ряды будут также сходиться.

Имеют место **две основные задачи** для рядов:

1. Дан ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$. Требуется исследовать его на сходимость.

2. Если ряд сходится, то нужно найти его сумму.

В основном, будем изучать первую задачу, так как если установлено, что ряд сходится, то, как мы убедимся позже, его сумму можно вычислить приближенно с любой требуемой точностью, поменяв $S \approx S_n$, где n выбираем так, чтобы обеспечить заданную точность.

Пример 1. Найдите общий член ряда: $\frac{2}{3}+\frac{5}{9}+\frac{8}{27}+\frac{11}{81}+\dots$.

Решение. Числители дробей, из которых составлен ряд, образуют арифметическую прогрессию $\{a_n\}$:

$$a_1 = 2,\ d = 3,\ a_n = a_1 + d(n-1) = 2 + 3(n-1) = 3n-1;$$

а знаменатели — геометрическую прогрессию $\{b_n\}$:

$$b_1 = 3,\ q = 3, b_n = b_1 q^{n-1} = 3\cdot 3^{n-1} = 3^n.$$

Следовательно, формула общего члена ряда имеет вид: $u_n = \frac{a_n}{b_n} = \frac{3n-1}{3^n}$.

Пример 2. Найдите сумму ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$.

Решение. Представим общий член ряда в виде суммы простейших правильных дробей:

$$u_n = \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right).$$

Тогда, *n-ая* частичная сумма ряда принимает вид:

$$S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)+\dots+$$
$$+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-3}-\frac{1}{2n-1}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right).$$

Для суммы ряда получаем:

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2n+1}\right) = \frac{1}{2}.$$

Пример 3. Исследуйте на сходимость ряд геометрической прогрессии:

$$a + aq + aq^2 + \ldots + aq^{n-1} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1}. \tag{1.3}$$

Решение. Запишем частичную сумму ряда (1.3):

$$S_n = a + aq + aq^2 + \ldots + aq^{n-1}. \tag{1.4}$$

Умножим (1.4) на q:

$$qS_n = aq + aq^2 + aq^3 + \ldots + aq^n, \tag{1.5}$$

и из (1.4) вычтем (1.5):

$$S_n - qS_n = a - aq^n \Rightarrow S_n = \frac{a - aq^n}{1 - q}, \text{ если } q \neq 1.$$

Перейдем в последнем соотношении к пределу:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{a - aq^n}{1-q} = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{a}{1-q} - \frac{aq^n}{1-q}\right] = \begin{cases} \dfrac{a}{1-q}, |q| < 1 \\ \infty, |q| > 1 \end{cases}.$$

Здесь при вычислении предела мы учли свойство показательной функции:

$$\lim_{x\to+\infty} q^x = \begin{cases} 0, |q| < 1 \\ \infty, |q| > 1 \end{cases}.$$

При $q = 1$ имеем:

$$S_n = \underbrace{a + a + a + \ldots + a}_{n-\text{раз}} = na \Rightarrow \lim_{n\to\infty} S_n = \infty,$$

т.е. ряд (1) расходится.

И, соответственно, при $q = -1$

$$S_n = a - a + a - a + \ldots = \begin{cases} 0, (n = 2k) \\ a, (n = 2k+1) \end{cases},$$

т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ не существует.

Итак, ряд геометрической прогрессии (1.3) расходится при $|q| \geq 1$ и ряд сходится при $|q| < 1$, причем его сумма равна $S = \dfrac{a}{1-q}$.

Пример 4. Исследуйте на сходимость гармонический ряд:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}. \qquad (1.6)$$

Решение. Известно, что последовательность $\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$ возрастает, причем $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n = e$:

$$\frac{1}{n} > \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \Rightarrow \frac{1}{n} > \ln(n+1) - \ln n$$

$$\begin{array}{ll}
n = 1: & 1 > \ln 2 - \ln 1 \\
n = 2: & \dfrac{1}{2} > \ln 3 - \ln 2 \\
n = 3: & \dfrac{1}{3} > \ln 4 - \ln 3 \\
\ldots & \ldots \\
n - 1: & \dfrac{1}{n-1} > \ln n - \ln(n-1) \\
n: & \dfrac{1}{n} > \ln(n+1) - \ln n
\end{array}$$

Складывая выписанные неравенства, получаем:

$$S_n \equiv 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n} > \ln(n+1) \Rightarrow \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \ln(n+1) = \infty.$$

Следовательно, гармонический ряд расходится.

1.2. Необходимый признак сходимости числовых рядов

Если числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, то $\lim_{n\to\infty} a_n = 0.$

Отметим, что обратное утверждение не верно, т.е. если $\lim_{n\to\infty} a_n = 0,$ то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ может как сходиться, так и расходиться (выполнено необходимое условие сходимости числового ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n,$ но этого не достаточно для сходимости ряда).

Следствие (достаточный признак расходимости ряда). Если $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$ либо этот предел не существует, то ряд расходится.

Пример 5. Исследуйте на сходимость ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2n+3}. \tag{1.7}$$

Решение. Так как $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2n+3} = \frac{1}{2} \neq 0,$ то, согласно следствию из необходимого признака сходимости, ряд (1.7) расходится.

Пример 6. Исследуйте на сходимость ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[n]{n}}. \tag{1.8}$$

Решение. Имеем знакочередующийся числовой ряд: $\lim\limits_{n\to\infty}|a_n| =$

$= \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n}} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}} = \frac{1}{e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n}}} = 1 \neq 0,$ следовательно, в силу следствия из необходимого признака сходимости, ряд (1.8) расходится.

Пример 7. Исследуйте на сходимость ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}} = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} + \ldots \qquad (1.9)$$

Решение. Применим необходимый признак сходимости: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n =$

$= \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}} = 0,$ следовательно, вопрос сходимости ряда (1.9) остается открытым. Требуется провести дополнительное исследование. Оценим n-ую частичную сумму ряда:

$$S_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} > \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} = n\frac{1}{\sqrt{n}} = \sqrt{n},$$

или, переходя в последнем неравенстве к пределу, получаем:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\sqrt{n} = \infty,$$

следовательно, согласно определению, ряд (1.9) расходится.

1.3. Знакоположительные числовые ряды. Достаточные признаки сходимости

Теорема (необходимое и достаточное условие сходимости знакоположительных числовых рядов). Для того, чтобы ряд с положительными членами $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n, \left(a_n > 0\right)$ сходился, необходимо и достаточно, чтобы последовательность его частичных сумм была ограничена сверху.

Отметим, что ее доказательство основано на признаке Вейерштрасса (всякая монотонно возрастающая и ограниченная сверху последовательность имеет предел). Эта теорема мало пригодна для практического применения. Однако с ее помощью разработаны эффективные достаточные признаки сходимости, которые приводим ниже.

Признаки сравнения

Пусть даны знакоположительные числовые ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, (a_n > 0). \tag{1.10}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n, (b_n > 0). \tag{1.11}$$

Первый признак сравнения. Если, начиная с некоторого номера N выполняется неравенство $a_n \le b_n$ для $\forall n > N,$ то:

1) из сходимости ряда (1.11) следует сходимость ряда (1.10);

2) из расходимости ряда (1.10) следует расходимость ряда (1.11).

Второй признак сравнения. Если существует конечный, отличный от нуля предел $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = l, (l \ne 0, l \ne \infty),$ то оба ряда (1.10), (1.11) одновременно сходятся или расходятся.

В качестве «рядов сравнения» выбирают:

1) ряд, составленный из членов геометрической прогрессии $\sum\limits_{n=1}^{\infty} aq^{n-1},$ который сходится при $|q| < 1$ и расходится при $|q| \ge 1.$

2) обобщенный гармонический ряд (ряд Дирихле) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}},$ который сходится при $\alpha > 1$ и расходится при $\alpha \le 1.$

Пример 8. Исследуйте на сходимость ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{5^n + 3}, \left(a_n = \frac{1}{5^n + 3}\right).$$

Решение. Выберем $b_n = \left(\frac{1}{5}\right)^n$ так, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ — сходящийся ряд, составленный из членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии со знаменателем $q = \frac{1}{5} < 1.$ Так как

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{5^n}{5^n + 3} = 1 \neq 0,$ то, согласно 2-му признаку сравнения, исходный ряд тоже сходится.

Пример 9. Исследуйте на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln(n+2)}.$

Решение. Обозначим $f_1(n) \equiv a_n = \frac{1}{\ln(n+2)}, f_2(n) \equiv b_n = \frac{1}{n+2}.$

Очевидно, что $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+2}$ — гармонический ряд (начинающийся с члена $b_1 = \frac{1}{3}$), расходящийся. С другой стороны, графический анализ показывает, что при $x \to +\infty$:

$$\ln x < x \Rightarrow \frac{1}{\ln x} > \frac{1}{x} \Rightarrow \frac{1}{\ln(n+2)} > \frac{1}{n+2} \Rightarrow a_n > b_n.$$

Следовательно, по 1-му признаку сравнения, исходный ряд также расходится.

Пример 10. Исследуйте на сходимость ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arcsin \frac{n-1}{n}}{\sqrt[3]{n^3 - 3n}}.$$

Решение. Воспользуемся двумя признаками сравнения:

$$a_n = \frac{\arcsin \frac{n-1}{n}}{\sqrt[3]{n^2 - 3n}} \leq \frac{\pi}{2} \frac{1}{\sqrt[3]{n^2 - 3n}} \sim \frac{\pi}{2} \frac{1}{n^{2/3}} \equiv b_n,$$

И так как ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2/3}}$ — эталонный расходящийся ряд, то исходный ряд также расходится.

Пример 11. Исследуйте на сходимость ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{n^2+n+1}\right).$$

Решение. Воспользуемся вторым признаком сравнения:

$$a_n = \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{n^2+n+1}\right) \sim \frac{1}{n^2+n+1} \sim \frac{1}{n^2} \equiv b_n, \text{ при } n \to \infty.$$

И так как ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ — эталонный сходящийся ряд, то исходный ряд также сходится.

Пример 12. Исследуйте на сходимость ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \ln n}{(n+1)^3}.$$

Решение. Имеем знакоположительный числовой ряд:

$$a_n = \frac{n \ln n}{(n+1)^3} \sim \frac{n \ln n}{n^3} = \frac{\ln n}{n^2} \le \frac{\sqrt{n}}{n^2} = \frac{1}{n^{3/2}} \equiv b_n, \text{ при } n \to \infty.$$

И так как ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$ — эталонный сходящийся ряд, то, согласно первому и второму признакам сравнения, исходный ряд также сходится.

Остается показать, что $\ln n \le \sqrt{n}$ при больших значениях *n*. Для этого достаточно установить, что функция $f(x) = \ln x - \sqrt{x}$ — убывающая при $x \to +\infty$:

$$f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{2-\sqrt{x}}{2\sqrt{x}} < 0 \text{ при } x > 4.$$

Пример 13. Исследуйте на сходимость ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-\sin n}{(n+1)(n+2)}.$$

Решение. Имеем знакоположительный числовой ряд:

$$a_n=\frac{1-\sin n}{(n+1)(n+2)}\le\frac{2}{(n+1)(n+2)}\sim\frac{2}{n^2}\equiv b_n,\ \text{при}\ n\to\infty.$$

И так как ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ — эталонный сходящийся ряд, то в силу первого и второго признаков сравнения, исходный ряд также сходится.

Пример 14. Исследуйте на сходимость ряд:

$$\sum_{n=2}^{\infty}\ln\left(\frac{n^2+2}{n^2-n}\right).$$

Решение. Имеем знакоположительный числовой ряд:

$$a_n=\ln\left(\frac{n^2+2}{n^2-n}\right)=\ln\left(1+\frac{n+2}{n^2-n}\right)\sim\frac{n+2}{n^2-n}\sim\frac{1}{n}\equiv b_n,\ \text{при}\ n\to\infty.$$

И так как ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ — эталонный расходящийся ряд, то в силу второго признака сравнения, исходный ряд также сходится.

Признак Даламбера. Пусть для ряда (1.10) с положительными членами существует конечный (или бесконечный) предел $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\rho.$ Если:

1) $\rho<1,$ то ряд сходится;
2) $\rho>1,$ ряд расходится;
3) $\rho=1,$ то ответа на вопрос о сходимости или расходимости ряда остается открытым (в этом случае необходимо привлекать другие признаки сходимости).

Пример 15. Исследуйте на сходимость ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n+2}{5^n}.$$

Решение. Используем признак Даламбера:

$$\rho=\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n+5}{5\cdot 5^n}\frac{5^n}{3n+2}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{5}\left(\frac{3n+5}{3n+2}\right)=\left\langle\frac{\infty}{\infty}\right\rangle=\frac{1}{5}<1,$$

следовательно, ряд сходится.

Пример 16. Исследуйте на сходимость числовой ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{n!}.$$

Решение. Воспользуемся признаком Даламбера:

$$\rho=\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}\frac{n!}{n^n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^n}{n^n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e>1,$$

то есть, ряд расходится.

Пример 17. Исследуйте на сходимость ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^n n^2}{(n+2)!}.$$

Решение. Воспользуемся признаком Даламбера:

$$\rho=\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{4(n+1)^2}{(n+3)n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{4}{(n+3)}=0<1,$$

следовательно, ряд сходится.

Пример 18. Исследуйте на сходимость ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!}.$$

Решение. Имеем знакоположительный числовой ряд:

$$\rho = \lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\left((n+1)!\right)^2}{(2n+2)!}\frac{(2n)!}{(n!)^2} = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2}{(2n+1)(2n+2)} = \frac{1}{4} < 1,$$

и, согласно признаку Даламбера, ряд сходится.

Признак Коши. Пусть для ряда (1.10) с положительными членами существует предел

$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = \rho.$ Если:

1) $\rho < 1,$ то ряд сходится;
2) $\rho > 1,$ ряд расходится;
3) $\rho = 1,$ то вопрос о сходимости ряда остается открытым.

Пример 19. Исследуйте на сходимость ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n}{5n-2}\right)^n.$$

Решение. Применяем признак Коши:

$$\rho = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{3n}{5n-2} == \left\langle\frac{\infty}{\infty}\right\rangle = \frac{3}{5} < 1,$$

следовательно, ряд сходится.

Пример 20. Исследуйте на сходимость ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+2}{n}\right)^{n^2}.$$

Решение. Воспользуемся признаком Коши:

$$\rho = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+2}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n}\right)^n = \left\langle 1^{\infty}\right\rangle = e^2 > 1,$$

а, значит, ряд расходится.

Интегральный признак Коши. Пусть

1) члены ряда (1.10) с положительными членами не возрастают $(a_1 \ge a_2 \ge a_3 \ge \ldots \ge a_n \ge \ldots);$

2) $f(x)$ — непрерывная невозрастающая функция такая, что $f(1)=a_1, f(2)=a_2, f(3)=a_3,..., f(n)=a_n,...$

Тогда, ряд (1.10) сходится, если сходится несобственный интеграл $\int\limits_1^{+\infty} f(x)dx,$ и расходится, если расходится этот несобственный интеграл.

Пример 21. Исследуйте на сходимость ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}.$$

Решение. Воспользуемся интегральным признаком Коши. В соответствии с общим членом ряда составим функцию $f(x)=1/x^3$. Очевидно, что $f(x)$ при $x \geq 1$ положительна, непрерывна и монотонно убывает. Рассмотрим несобственный интеграл

$$\int\limits_1^{+\infty}\frac{1}{x^3}dx=\lim_{b\to\infty}\int\limits_1^{b}\frac{1}{x^3}dx=-\frac{1}{2}\lim_{b\to\infty}\frac{1}{x^2}\Big|_1^b=-\frac{1}{2}\lim_{b\to\infty}\left(\frac{1}{b^2}-1\right)=\frac{1}{2},$$

то есть несобственный интеграл сходится. А, значит, исходный числовой ряд тоже сходится.

Отметим, что исследуемый ряд = эталонный сходящийся ряд (обобщенный гармонический ряд).

Пример 22. Исследуйте на сходимость ряд:

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}.$$

Решение. Применяем интегральный признак Коши. Ряд начинается с номера $n=2$ (так как при $n=1$, $\ln n=0$). В нашем случае, $f(x)=1/(x\ln x)$ и при $x \geq 2$ функция положительна, непрерывна и монотонно убывает. Найдем несобственный интеграл:

$$\int\limits_2^{+\infty}\frac{1}{x\ln x}dx=\lim_{b\to\infty}\int\limits_2^{b}\frac{d\ln x}{\ln x}=\lim_{b\to\infty}\ln\ln x\Big|_2^b=+\infty$$ — интеграл расходится,

следовательно, исходный ряд также расходится.

1.4. Знакопеременные числовые ряды

Рассмотрим знакопеременный числовой ряд, члены которого имеют произвольные знаки,

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 ... + a_n + ... \qquad (1.12)$$

и ряд, составленный из абсолютных величин членов этого ряда,

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = |a_1| + |a_2| + |a_3| + ... + |a_n| + ... \qquad (1.13)$$

Определение 5. Ряд (1.12) называется ***абсолютно сходящимся***, если сходится соответствующий ему ряд (1.13), составленный из абсолютных величин его членов. Ряд (1.12) называется ***условно сходящимся*** (или ***неабсолютно сходящимся***), если он сам, т.е. (1.12) сходится, а соответствующий ему ряд (1.13) расходится.

Имеет место **теорема**: Всякий абсолютно сходящийся ряд является сходящимся рядом.

Таким образом, из абсолютной сходимости числового ряда следует его обычная сходимость. Иначе говоря, если сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$, то сходится и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Определение 6. Знакопеременный ряд, члены которого чередуются знаком, т.е.

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \ a_n = (-1)^{n+1} u_n, (u_n \geq 0), \qquad (1.14)$$

называется знакочередующимся рядом.

Имеет место **признак Лейбница** (достаточный признак сходимости знакочередующегося ряда): если для знакочередующегося ряда (1.14) выполняются условия:

1) $u_1 \geq u_2 \geq u_3 \geq ... \geq u_n \geq ...$;
2) $\lim\limits_{n \to \infty} u_n = 0$,

то этот ряд сходится (вообще говоря, не абсолютно), причем модуль его суммы не превосходит модуля первого члена $(|S| \leq u_1)$, а остаток ряда R_n удовлетворяет неравенству $(|R_n| \leq u_{n+1})$.

Следствие. Если сходящийся знакочередующийся ряд, удовлетворяющий условиям признака Лейбница, приближенно заменить n-ой частичной суммой S_n, т.е. положить $S \approx S_n$, то абсолютная величина допущенной при этом ошибки меньше абсолютной величины первого члена отброшенной части ряда, т.е. $\left|S - S_n\right| < u_{n+1}$.

Отметим, что для проверки числового ряда на абсолютную сходимость можно применить по отношению к ряду (1.13) все ранее приведенные достаточные признаки сходимости знакоположительных рядов.

Пример 23. Исследуйте на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n}{2^n}$.

Решение. Начинаем исследование сходимости знакочередующегося ряда с исследования его абсолютной сходимости, т.е. составляем ряд, составленный из модулей членов исходного ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}, u_n = \frac{n}{2^n}$. Применяя достаточный признак сходимости Даламбера, нетрудно убедиться, что последний ряд сходится:

$$\rho = \lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{n+1/2^{n+1}}{n/2^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{2n} = \frac{1}{2} < 1,$$

т.е. исходный ряд сходится абсолютно.

Пример 24. Исследуйте на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$.

Решение. Имеем знакочередующийся ряд. Убеждаемся, что ряд составленный из модулей членов исходного ряда, представляет собой эталонный, расходящийся обобщенно гармонический ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}, (\alpha = 1/2 < 1)$.

С другой стороны, выполняются оба условия достаточного признака Лейбница, подтверждающие условную сходимость ряда:

1) $1 > \frac{1}{\sqrt{2}} > \frac{1}{\sqrt{3}} > \ldots > \frac{1}{n} > \frac{1}{\sqrt{n+1}} > \ldots;$

2) $\lim\limits_{n\to\infty}|a_n| = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}} = 0.$

Пример 25. Исследуйте на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n \operatorname{tg}\frac{1}{n}.$

Решение. Имеем знакочередующийся ряд. Убеждаемся, что ряд, составленный из модулей членов исходного ряда, представляет собой эталонный, расходящийся гармонический ряд: $|a_n| = \operatorname{tg}\frac{1}{n} \sim \frac{1}{n}.$

Проверяем на условную сходимость. Убедимся, что выполняются оба условия достаточного признака Лейбница:

1) $|a_n| = \operatorname{tg}\frac{1}{n}(\searrow)$, т.к. $\left(\operatorname{tg}\frac{1}{x}\right)' = \frac{1}{\cos^2(1/x)}\left(-\frac{1}{x^2}\right) < 0$ при $x \to +\infty$;

2) $\lim\limits_{n\to\infty}|a_n| = \lim\limits_{n\to\infty}\operatorname{tg}\frac{1}{n} = 0.$

Следовательно, исходный ряд сходится условно.

Пример 26. Сколько членов знакочередующегося ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)^2} = 1 - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} - \frac{1}{7^2} + \ldots,\ u_n = \left|\frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)^2}\right| = \frac{1}{(2n-1)^2}$$

необходимо взять, чтобы вычислить его сумму с точностью $\Delta = 0.01$.

Решение. Очевидно, что ряд, составленный из модулей членов исходного ряда, согласно второму признаку сравнения, сходится:

$$u_n = \frac{1}{(2n-1)^2} \sim \frac{1}{4n^2}.$$

Согласно следствию из признака Лейбница, если заменить сумму ряда S частичной суммой S_n, то при этом мы допускаем ошибку

$$\Delta = |S - S_n| < u_{n+1} = \frac{1}{(2n+1)^2}.$$

Следовательно, достаточно потребовать выполнения условия

$$\frac{1}{(2n+1)^2} \le 0.01 \Rightarrow 2n+1 \ge 10 \Rightarrow n \ge 4.5.$$

Таким образом, можем подсчитать сумму ряда, сохранив при этом его пять членов.

Вопросы и примеры для закрепления материала

1) Дайте определение числового ряда и его суммы. Найдите, исходя из определения, сумму ряда $\sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1}$ при $|q|<1$.

Выпишите первые пять членов приведенных ниже рядов:

$$2)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n};\ 3)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{2n+1};\ 4)\ \sum_{n=1}^{\infty} n \sin\frac{\pi}{n}.$$

Найдите сумму числового ряда, предварительно обосновав его сходимость:

$$5)\ \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{5}\right)^n;\ 6)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}.$$

7) Сформулируйте признак Лейбница для знакочередующегося числового ряда. Приведите пример знакочередующегося ряда, сходящегося условно.

2. ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ РЯДЫ

2.1. Основные понятия. Область сходимости функционального ряда

Пусть дана последовательность функций $u_1(x)$, $u_2(x)$, $u_3(x)$,..., $u_n(x)$,..., определенная на некотором множестве X. Ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x), \tag{2.1}$$

членами которого являются функции $u_n(x)$, называется ***функциональным***.

Если при $x = x_0 \in X$ числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0)$ сходится, то говорят, что ряд (2.1) сходится в точке x_0. Множество всех значений x, при которых ряд (2.1) сходится, называют ***областью сходимости ряда***.

Суммой функционального ряда называют функцию $S(x)$, которая определяется в каждой точке области его сходимости как

$$S(x) = \lim_{n\to\infty} S_n(x), \tag{2.2}$$

где $S_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + ... + u_n(x)$ — «n-ая» частичная сумма ряда.

В области сходимости ряда имеет место равенство:

$$S(x) = S_n(x) + R_n(x), \tag{2.3}$$

где $R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(x)$ — «n-ый» остаток ряда.

Пример 27. Найдите область сходимости функционального ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(x+n)(x+n+2)}.$$

Решение. Члены данного ряда определены при всех $x \neq -n, (n = 1, 2, ...)$. Найдем область абсолютной сходимости. Сравним $\left|u_n\left(x\right)\right| = \dfrac{1}{\left|x+n\right|\left|x+n+2\right|}$ с соответствующим членом $b_n = \dfrac{1}{n^2}$ сходящегося обобщенного гармонического ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_n\left(x\right)}{b_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{\left|x+n\right|\left|x+n+2\right|} = 1 \neq 0, \left(x \neq -n\right).$$

Следовательно, согласно 2-ому признаку сравнения, исходный ряд абсолютно сходится всюду, кроме точек $x = -n, \left(n = 1, 2, ...\right)$, в которых ряд не определен.

Пример 28. Найдите область сходимости функционального ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\mathrm{tg}^n\,\frac{x}{2}.$$

Решение. Используем признак Даламбера:

$$\left|u_n\left(x\right)\right| = \frac{1}{n^2}\left|\mathrm{tg}^n\,\frac{x}{2}\right|; l = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}\left(x\right)}{u_n\left(x\right)}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{\left(n+1\right)^2}\left|\mathrm{tg}\,\frac{x}{2}\right| = \left|\mathrm{tg}\,\frac{x}{2}\right|.$$

Положим

$$l < 1 \Rightarrow \left|\mathrm{tg}\,\frac{x}{2}\right| < 1 \Rightarrow -\frac{\pi}{2} + 2\pi k < x < \frac{\pi}{2} + 2\pi k, \left(k \in Z\right).$$

Итак, нашли область абсолютной сходимости ряда. Дополнительно исследуем сходимость ряда на концах интервала сходимости. При $x = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi k$ получаем сходящийся обобщенный гармонический ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$. А при $x = -\dfrac{\pi}{2} + 2\pi k$ имеем знакочередующийся ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\left(-1\right)^n}{n^2}$, который сходится абсолютно. Таким образом, ряд сходится при $-\dfrac{\pi}{2} + 2\pi k \leq x \leq \dfrac{\pi}{2} + 2\pi k$.

Пример 29. Найдите область сходимости функционального ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n x^n}{n^2+e^x}.$$

Решение. Используем обобщенный признак Даламбера:

$$|u_n(x)|=\frac{|x|^n}{n^2+e^x};l=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{|x|(n^2+e^x)}{(n+1)^2+e^x}=$$

$$=|x|\lim_{n\to\infty}\frac{1+\dfrac{e^x}{n^2}}{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^2+\dfrac{e^x}{n^2}}=|x|,\text{ при любом } x\in R.$$

Положим $|x|<1\Rightarrow -1<x<1$.

Таким образом, нашли область абсолютной сходимости ряда. Проводим дополнительное исследование сходимости ряда на концах интервала сходимости:

$x=-1$ — получаем сходящийся ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2+1/e}$;

$x=1$ — имеем знакочередующийся ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n^2+e}$, который сходится абсолютно. Таким образом, ряд сходится при всех $x\in[-1;1]$.

Пример 30. Найдите область сходимости функционального ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}\left(\frac{x+2}{x-1}\right)^n.$$

Решение. Заметим, что $x\neq 1$. Используем обобщенный признак Даламбера:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right|=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n+1}{2n-1}\right)\left|\frac{x+2}{x-1}\right|=\left|\frac{x+2}{x-1}\right|.$$

Потребуем выполнения условия:

$$\left|\frac{x+2}{x-1}\right|<1 \Rightarrow |x+2|<|x-1| \Rightarrow 3(2x+1)<0 \Rightarrow x<-\frac{1}{2},$$

которое задает область сходимости ряда. Проводим дополнительное исследование сходимости ряда на концах интервала сходимости:

$$x=-\frac{1}{2}:\ u_n=\frac{1}{2n-1}\left(\frac{-\frac{1}{2}+2}{-\frac{1}{2}-1}\right)^n=\frac{(-1)^n}{2n-1},$$

т.е. получили условно сходящийся ряд.

Следовательно, ряд сходится при всех $x\in\left(-\infty;-\frac{1}{2}\right]$.

Известно, что сумма конечного числа непрерывных функций также является непрерывной функцией, сумма конечного числа дифференцируемых функций равна сумме производных от составляющих функций, интеграл от конечной суммы непрерывных функций равен сумме интегралов от составляющих функций. Будет ли сказанное выполняться для бесконечных сумм, т.е. для рядов? Оказывается, нет, не всегда, а только в случае равномерной сходимости функционального ряда.

2.2. Равномерная сходимость. Признак Вейерштрасса. Основные теоремы о равномерной сходимости функциональных рядов

Определение 7. Функциональный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ называется ***равномерно сходящимся*** в области D к сумме $S(x)$, если для $\forall\varepsilon>0$, $\exists N=N(\varepsilon)$ так, чтобы для $\forall n>N$ и $\forall x\in D$ выполняются неравенства $\left|S(x)-S_n(x)\right|<\varepsilon$.

Определение 8. Функциональный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ называется ***мажорируемым*** в D, если существует сходящийся положительный числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ (мажоранта), что для $\forall x \in D$ выполняется условие $\left|u_n\left(x\right)\right| \le a_n$.

Признак равномерной сходимости функционального ряда (признак Вейерштрасса). Пусть дан функциональный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n\left(x\right)$. Если существует такой сходящийся ряд с положительными членами $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, что $\left|u_n\left(x\right)\right| \le a_n$ для $\forall n$ и $\forall x \in D$, то функциональный ряд равномерно сходится на D.

Пример 31. Докажите, что функциональный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}$ равномерно сходится на всей числовой прямой.

Решение. Так как $\left|\frac{\cos nx}{n^2}\right| \le \frac{1}{n^2}$ для $\forall x \in R$, и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ сходится, то исходный ряд равномерно сходится на всей числовой прямой.

Пример 32. Исследуйте функциональный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{n}}{x^2 + n^2}$ на равномерную сходимость и укажите область сходимости.

Решение. Так как $\left|\frac{\sqrt[3]{n}}{x^2 + n^2}\right| \le \frac{\sqrt[3]{n}}{n^2} = \frac{1}{n^{5/3}} \equiv b_n$ для $\forall x \in R$, и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{5/3}}$ — эталонный сходящийся ряд, который служит мажорантой для исходного функционального ряда. Следовательно, согласно признаку Вейерштрасса, ряд равномерно сходится на всей числовой прямой.

Пример 33. Найдите область сходимости функционального ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+3}{\left(n+1\right)^5 x^{2n}}$.

Решение. Имеем знакоположительный ряд, причем $x \neq 0$. Для установления области сходимости воспользуемся признаком Даламбера:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)} = \lim_{n\to\infty}\frac{(2n+5)(n+2)^5}{(2n+3)(n+1)^5}\frac{1}{x^2} = \frac{1}{x^2},$$

и положим $\frac{1}{x^2} < 1$, тем самым найдем область сходимости функционального ряда:

$$x^2 > 1 \Rightarrow x \in (-\infty;-1) \cup (1;+\infty).$$

Остается провести дополнительное исследование сходимости ряда на концах полученных интервалов:

$x = 1 : u_n = \frac{2n+3}{(n+1)^5} \sim \frac{2n}{n^5} = \frac{2}{n^4} \equiv b_n$ — эталонный сходящийся ряд;

$x = -1 : u_n = \frac{2n+3}{(n+1)^5(-1)^{2n}} \sim \frac{2n}{n^5} = \frac{2}{n^4} \equiv b_n$.

Итак, область сходимости функционального ряда есть множество всех $x \in (-\infty;-1] \cup [1;+\infty)$.

Теорема **1** (достаточное условие). Если

1) ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ равномерно сходится на $[a;b]$ к функции $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$;

2) $u_n(x) \in C_{[a,b]}, \forall n$,

то сумма ряда $S(x) \in C_{[a,b]}$.

Пример 34. Докажите, что функциональный ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mathrm{arctg}\, nx}{1+n^2}$ непрерывен на всей числовой прямой.

Решение. Действительно, $|u_n(x)| < \frac{\pi}{2}\frac{1}{1+n^2}$, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\pi}{2}\frac{1}{1+n^2}$ — сходящийся знакоположительный числовой ряд. С другой стороны,

$u_n(x)=\dfrac{\operatorname{arctg} nx}{1+n^2}\in C_R$. Следовательно, согласно теореме 1, исходный ряд является непрерывной функцией.

Пример 35. Исследуйте непрерывность суммы функционального ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{arctg}^n x}{n^3}.$$

Решение. Найдем сперва область сходимости ряда:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{|\operatorname{arctg}x|\,n^3}{(n+1)^3}=|\operatorname{arctg}x|.$$

Положим $|\operatorname{arctg}x|<1\Rightarrow -1<\operatorname{arctg}x<1\Rightarrow \operatorname{tg}(-1)<x<\operatorname{tg}1\Rightarrow$ $\Rightarrow -\operatorname{tg}1<x<\operatorname{tg}1,$ тем самым уточнили область сходимости ряда. Проводим исследование на сходимость на концах интервала:

$x=-\operatorname{tg}1: u_n=\dfrac{(-1)^n}{n^3},$ т.е. получили абсолютно сходящийся ряд;

$x=\operatorname{tg}1: u_n=\dfrac{1}{n^3},$ и в этом случае получаем сходящийся ряд.

Следовательно, область сходимости функционального ряда есть отрезок $[-\operatorname{tg}1;\operatorname{tg}1]$.

В области сходимости ряда $x\in[-\operatorname{tg}1;\operatorname{tg}1]$ имеем:

$$|u_n(x)|=\left|\frac{\operatorname{arctg}^n x}{n^3}\right|\le\frac{t^n}{n^3},\ \text{где } t\equiv|\operatorname{tg}x|<1.$$

То есть члены функционального ряда в области сходимости мажорируются членами сходящегося знакоположительного числового ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{t^n}{n^3},(0<t<1)$. То есть ряд сходится равномерно в области $x\in[-\operatorname{tg}1;\operatorname{tg}1]$.

С другой стороны, члены функционального ряда $u_n\left(x\right)=\dfrac{\operatorname{arctg} nx}{n^3}\in C_{[-\operatorname{tg}1;\operatorname{tg}1]}$. Следовательно, в соответствии с теоремой 1, сумма данного ряда непрерывна в области сходимости.

Пример 36. Подтвердите, что существует предел

$\lim\limits_{x\to\infty}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^2}{1+x^2 2^n}$ и вычислите его.

Решение. Понятно, что члены функционального ряда $u_n\left(x\right)=\dfrac{x^2}{1+x^2 2^n}$ — непрерывны на всей числовой прямой. Покажем, что ряд равномерно сходится на R:

$$\left|u_n\left(x\right)\right|=\left|\frac{x^2}{1+x^2 2^n}\right|\le\left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

Следовательно, выполнены все условия теоремы 1 о непрерывности суммы ряда на всей числовой прямой, и в частности, при $x\to\infty$:

$$\lim_{x\to\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^2}{1+x^2 2^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2}{1+x^2 2^n}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2}{x^2\left(\dfrac{1}{x^2}+2^n\right)}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n=$$

$$=\frac{a_1}{1-q}=\frac{\left(1/2\right)}{1-\left(1/2\right)}=1.$$

Отметим, что здесь мы воспользовались формулой суммы членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии $a_n=\left(\dfrac{1}{2}\right)^n,\left(a_1=\dfrac{1}{2};q=\dfrac{1}{2}\right).$

***Теорема* 2.** Если

1) ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ равномерно сходится на [a; b] к функции $S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$;

2) функции $u_n(x) \in C_{[a,b]}, \forall n$,

то функциональный ряд можно почленно интегрировать, т.е.

$$\int\limits_a^b S(x)dx = \int\limits_a^b \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_a^b u_n(x)dx. \tag{2.4}$$

Пример 37. Ряд, составленный из членов геометрической прогрессии $1+x+x^2+...+x^{n-1}+...=\dfrac{1}{1-x}$ равномерно сходится на (–1;1), причем на (–1;1) все члены ряда непрерывны. Следовательно, для $\forall x \in (-1;1)$

$$\int\limits_0^x \left(\sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} \right) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int\limits_0^x x^{n-1} dx \right),$$

$$-\ln(1-x)\Big|_0^x = \left(1+x+x^2+...+x^{n-1}+...\right)\Big|_0^x,$$

$$\ln(1-x) = -x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-...-\frac{x^n}{n}-... .$$

Так как интервал $(-1;1)$ симметричен относительно начала координат, то поменяем в последней формуле x на $-x$, в результате получим

$$\ln(1+x) = x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+...+\frac{(-1)^{n+1}x^n}{n}+..., (-1<x<1).$$

***Теорема* 3**. Если

1) ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ сходится на [a; b] к функции $S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$;

2) функции $u_n\left(x\right)\in C^1{}_{[a,b]}, \forall n$;

3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n'\left(x\right)$ равномерно сходится на $[a;\ b]$, то

$$S'\left(x\right)=\left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n\left(x\right)\right)'=\sum_{n=1}^{\infty} u_n'\left(x\right), \qquad (2.5)$$

т.е. ряд можно почленно дифференцировать.

Пример 38. Представьте обоснование возможности дифференцирования ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^3}=S\left(x\right)$ и найдите $S'\left(x\right)$.

Решение. Действительно, этот ряд равномерно сходится на всей числовой оси, т.к. $\left|\frac{\sin nx}{n^3}\right|\le \frac{1}{n^3}$, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ сходится. Кроме того, $u_n'\left(x\right)=\frac{\cos nx}{n^2}\in C_{(-\infty,\infty)}$, причем ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n'\left(x\right)$ сходится равномерно, так как $\left|\frac{\cos nx}{n^2}\right|<\frac{1}{n^2}$, для $\forall x\in R$. Следовательно, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}=S'\left(x\right)$.

Вопросы и примеры для закрепления материала

Найдите область сходимости функциональных рядов:

$$1)\ \sum_{n=1}^{\infty}\left(-1\right)^{n-1} x^n;\ 2)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\operatorname{tg}^n\frac{x}{2};\ 3)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(-1\right)^{n+1}}{n^x}.$$

4) Дайте определение функционального ряда, равномерно сходящегося на отрезке. Введите понятие функционального ряда, мажорируемого на отрезке. Докажите, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^3}$ равномерно сходится на всей числовой прямой.

3. СТЕПЕННЫЕ РЯДЫ

3.1. Основные понятия. Теорема Абеля. Радиус сходимости степенного ряда

Переходим к рассмотрению распространенного на практике частного случая функциональных рядов — степенные ряды.

Определение 9. ***Степенным рядом*** называют функциональный ряд вида

$$a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \ldots + a_n(x - x_0)^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n, \quad (3.1)$$

где $a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots \in R$ — называются коэффициентами ряда, а $x_0 \in R$ — центром ряда.

При $x_0 = 0$ степенной ряд (3.1) принимает вид

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n. \quad (3.2)$$

Отметим, что частичные суммы $S_n(x)$ степенного ряда представляют собой многочлены n-ой степени, причем в области сходимости степенного ряда при больших n имеет место приближенное равенство

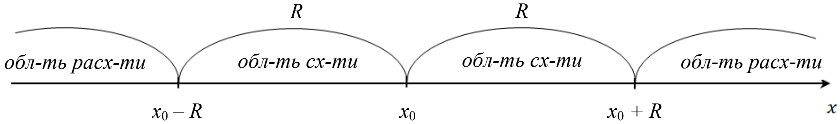
$$S(x) \approx S_n(x)$$

Ряд (3.1) с помощью замены $x - x_0 = X$ приводится к ряду (3.2) относительно переменной X, потому достаточно провести исследование сходимости ряда (3.2).

Для степенного ряда справедлива **теорема Абеля**:

Если степенной ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ сходится при $x = x_1, (x_1 \neq 0)$, то он сходится, притом абсолютно, при всех x, для которых $|x| < |x_1|$. Если же степенной ряд (3.2) расходится при $x = x_2 \neq 0$, то он расходится при всех x, для которых $|x| < |x_2|$.

Существует такое число $R > 0$, что степенной ряд (3.2) сходится в интервале $|x| < R$ и расходится при $|x| < R$. Интервал $(-R;R)$ называют интервалом сходимости степенного ряда (3.2), а величину R называют радиусом сходимости степенного ряда:



Отметим, что для степенного ряда (3.1) интервал сходимости имеет вид $\left(x_0 - R; x_0 + R\right)$. Чтобы найти область сходимости степенного ряда, нужно сперва определить его интервал сходимости, а затем дополнительно исследовать сходимость ряда на концах интервала сходимости при $x = \pm R$.

Если степенной ряд (3.2) сходится только в одной точке $x = 0$, то пишут $R = 0$, а если же степенной ряд сходится на всей числовой прямой, то $R = \infty$.

Для нахождения радиуса сходимости степенного ряда (3.2) применяют следующие формулы:

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|, \text{ либо } R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}}. \tag{3.3}$$

В общем случае (и в частности, если последние пределы не существуют!) применяют обобщенные признаки Даламбера и Коши.

Пример 39. Найдите радиус сходимости степенного ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{2n+3}.$$

Решение. Воспользуемся формулой (3.3):

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{2(n+1)+5}{2n+3}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{2n+5}{2n+3} = 1.$$

Следовательно, интервал сходимости степенного ряда есть $(-1;1)$. Проводим дополнительное исследование сходимости ряда на концах интервала сходимости:

- при $x = 1$ получаем числовой ряд $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+3}$, который, как нетрудно убедиться с помощью второго признака сравнения, расходится;
- при $x = -1$ имеем знакочередующийся ряд $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+3}$, который, согласно признаку Лейбница, сходится, и притом, условно.

Таким образом, областью сходимости служит полуинтервал $[-1;1)$.

Отметим, что радиус сходимости можно было найти, используя обобщенный признак сходимости Даламбера:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{|x|^{n+1}}{2n+5}\frac{2n+3}{|x|^n} = |x|\lim_{n\to\infty}\frac{2n+3}{2n+5} = |x|,$$

и тогда, полагая $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right| = |x| < 1,$ находим интервал сходимости $(-1;1)$, и дополнительно проводим исследование сходимости ряда на концах полученного интервала сходимости.

3.2. Теоремы о степенных рядах

Для степенного ряда, как частного случая функционального ряда, имеют место следующие 4 теоремы:

***Теорема* 1**. Степенной ряд равномерно сходится на любом отрезке $[-\rho;\rho]\subset(-R;R)$, лежащем внутри интервала сходимости.

Пример 40. Найдите область сходимости степенного ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+5)^n}{3^n}.$$

Решение. Применяем обобщенный признак сходимости Коши:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|u_n\left(x\right)\right|}=\frac{\left|x+5\right|}{3}<1\Rightarrow\left|x+5\right|<3\Rightarrow-8<x<-2.$$

Дополнительно исследуем на концах:

$x=-8$: $u_n=\left(-1\right)^n$, т.е. получили расходящийся ряд;

$x=-2$: $u_n=1\neq 0$, полученный ряд также расходится (по необходимому признаку).

Итак, область сходимости есть интервал $\left(-8;-2\right)$.

Пример 41. Найдите область сходимости степенного ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n\left(3x-1\right)^n}{n}.$$

Решение. Воспользуемся обобщенным признаком Даламбера:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}\left(x\right)}{u_n\left(x\right)}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{2\left|3x-1\right|n}{n+1}=2\left|3x-1\right|.$$

Положим, что

$$2\left|3x-1\right|<1\Rightarrow\left|3x-1\right|<\frac{1}{2}\Rightarrow-\frac{1}{2}<3x-1<\frac{1}{2}\Rightarrow\frac{1}{6}<x<\frac{1}{2}.$$

Проводим дополнительное исследование на концах интервала сходимости:

$x=\dfrac{1}{6}$: $u_n=\dfrac{2^n\left(-1\right)^n}{n2^n}=\dfrac{\left(-1\right)^n}{n}$, т.е. получаем условно сходящийся ряд;

$x=\dfrac{1}{2}$: $u_n=\dfrac{1}{n}$, получаем расходящийся, гармонический ряд.

Таким образом, ряд сходится на множестве $x \in \left[\frac{1}{6}; \frac{1}{2}\right)$.

Пример 42. Найдите область сходимости степенного ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (x+1)^n}{n 8^n}.$$

Решение. Применяем обобщенный признак сходимости Даламбера:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{|x+1|^{3n+3}}{(n+1)8^{n+1}}\frac{n8^n}{|x+1|^{3n}} = \frac{|x+1|^3}{8} < 1 \Rightarrow |x+1| < 2 \Rightarrow -3 < x < 1.$$

Дополнительно исследуем на концах:

$x=-3$: $u_n = \frac{1}{n}$, т.е. получили расходящийся ряд;

$x=1$: $u_n = \frac{(-1)^n}{n}$, в этом случае получаем условно сходящийся ряд.

Итак, область сходимости есть интервал $(-3;1]$.

***Теорема* 2.** Сумма степенного ряда является непрерывной функцией в каждой точке интервала сходимости.

***Теорема* 3.** Степенной ряд можно почленно интегрировать по любому отрезку, лежащему внутри интервала сходимости.

Отметим, что последнюю теорему применяют для получения разложений функций в степенные ряды.

Пример 43. Разложите в степенной ряд функцию $f(x) = \mathrm{arctg}x$ и укажите область его сходимости.

Решение. Известно, что на всей числовой прямой справедливо следующее равенство

$$\mathrm{arctg}x = \int_0^x \frac{dx}{1+x^2}. \tag{3.4}$$

Рассмотрим ряд, составленный из членов геометрической прогрессии

$$1-x+x^2+\ldots+\left(-1\right)^n x^n+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\left(-1\right)^n x^n,$$

причем в области $|x| < 1$ этот ряд сходится (к сумме членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии!):

$$1-x+x^2+\ldots+\left(-1\right)^n x^n+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\left(-1\right)^n x^n=\frac{1}{1+x}. \qquad (3.5)$$

Заменим в формуле (3.5) x на x^2:

$$\frac{1}{1+x^2}=1-x^2+x^4+\ldots+\left(-1\right)^n x^{2n}+\ldots,\left|x\right|<1. \qquad (3.6)$$

Согласно теореме 3 степенной ряд можно почленно интегрировать в любом интервале $\left(0;x\right)\subset\left(-1;1\right)$ следовательно, для всех $x\in\left(-1;1\right)$:

$$\operatorname{arctg} x=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\ldots+\left(-1\right)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\ldots,\left|x\right|<1. \qquad (3.7)$$

***Теорема* 4**. Степенной ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n=f\left(x\right) \qquad (3.8)$$

в интервале сходимости $(–R;R)$ можно почленно дифференцировать, т.е.

$$a_1+2a_2x+3a_3x^2+\ldots+na_nx^{n-1}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}=f'\left(x\right). \qquad (3.9)$$

При этом ряд (3.9) имеет тот же интервал сходимости $(–R;R)$.

3.3. Необходимое и достаточное условие сходимости ряда Тейлора. Достаточный признак разложимости функции в ряд Тейлора

Пусть функция $y = f(x)$ определена в некоторой окрестности точки $x = x_0$, и $f(x) \in C^{(\infty)}$.

Определение 10. ***Степенной ряд***

$$a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \ldots + a_n(x - x_0)^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n,$$

коэффициенты которого определены формулой $a_n = \dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$, называется ***рядом Тейлора*** функции $y = f(x)$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n. \tag{3.10}$$

При $x_0 = 0$ ряд Тейлора принимает вид

$$f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

и называется ***рядом Маклорена*** функции $y = f(x)$.

Необходимым условием для представления функции степенным рядом Тейлора является бесконечная дифференцируемость функции в окрестности точки $x = x_0$. Однако это условие недостаточное, т.е. из него не следует, что если полученный ряд сходится, то непременно к порождающей его функции $f(x)$.

Перейдем к условиям, при выполнении которых ряд Тейлора сходится к функции $f(x)$.

Теорема 5 (*необходимое и достаточное условие разложимости функции в степенной ряд Тейлора*).

Для того, чтобы функция $y = f(x)$ была разложимой в ряд Тейлора в некоторой R — окрестности точки $x = x_0$ $\left(x \in U_R(x_0)\right)$, необходимо и достаточно, чтобы для всех $x \in U_R\left(x_0\right)$ выполнялись два условия:

1) $f\left(x\right) \in C^{(\infty)}$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty} R_n\left(x\right) = 0.$

Этот подход не совсем удобен в практическом плане, так как не всегда возможно найти $\lim\limits_{n\to\infty} R_n\left(x\right)$. Используют другую теорему:

***Теорема* 6** (*достаточное условие разложимости функции в ряд Тейлора*).

Пусть на некотором интервале $\left|x - x_0\right| < R, \left(R > 0\right)$ выполняются условия:

1) $f\left(x\right) \in C^{(\infty)}$; 2) $\exists M > 0, \left|f^{(n)}\left(x\right)\right| < M, \left(n = 0, 1, 2, \ldots\right).$

Тогда функция $f(x)$ разлагается в этом интервале в ряд Тейлора (3.10) по степеням $\left(x - x_0\right)$.

С помощью теоремы 6 получены формулы разложения элементарных функций в ряд Тейлора и указана область сходимости ряда Тейлора к самой функции.

3.4. Основные разложения в ряд Тейлора и область их сходимости

I. $f\left(x\right) = e^x$:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots, \quad x \in \left(-\infty; +\infty\right).$$

II. $f\left(x\right) = \sin x$:

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \left(-1\right)^n \frac{x^{2n+1}}{\left(2n+1\right)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots + \left(-1\right)^n \frac{x^{2n+1}}{\left(2n+1\right)!} + \ldots,$$

$x \in \left(-\infty; +\infty\right).$

III. $f\left(x\right) = \cos x$:

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \left(-1\right)^n \frac{x^{2n}}{\left(2n\right)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + \left(-1\right)^n \frac{x^{2n}}{\left(2n\right)!} + \ldots,$$

$x \in \left(-\infty; +\infty\right).$

IV. $f(x)=(1+x)^{\alpha}$:

$$(1+x)^{\alpha}=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)...(\alpha-n+1)}{n!}x^n=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+$$

$$...+\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)...(\alpha-n+1)}{n!}x^n+...,$$

$$\begin{cases}\text{если } \alpha\in(-\infty;-1], \text{ то } \quad x\in(-1;1)\\ \text{если } \alpha\in(-1;0), \quad \text{ то } \quad x\in(-1;1]\\ \text{если } \alpha\in(0;+\infty), \quad \text{ то } \quad x\in[-1;1].\end{cases}$$

V. $f(x)=\frac{1}{1-x}$:

$$\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n=1+x+x^2+...+x^n+..., \quad x\in(-1;1).$$

VI. $f(x)=\frac{1}{1+x}$:

$$\frac{1}{1+x}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n=1-x+x^2+...+(-1)^n x^n+..., x\in(-1;1).$$

VII. $f(x)=\sqrt{1+x}$:

$$\sqrt{1+x}=1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1\cdot3\cdot5...|2n-3|}{2^n\cdot n!}x^n=1+\frac{1}{2\cdot1!}x-\frac{1}{2^2\cdot2!}x^2+$$

$$+\frac{1\cdot3}{2^3\cdot3!}x^3...+(-1)^{n-1}\frac{1\cdot3\cdot5\cdot...(2n-3)}{2^n\cdot n!}x^n+...,x\in[-1;1].$$

VIII. $f(x)=\frac{1}{\sqrt{1+x}}$:

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}}=1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1\cdot3\cdot5...(2n-1)}{2^n\cdot n!}x^n=1-\frac{1}{2\cdot1!}x+\frac{1\cdot3}{2^2\cdot2!}x^2-$$

$$-\frac{1\cdot3\cdot5}{2^3\cdot3!}x^3...+(-1)^n\frac{1\cdot3\cdot5\cdot...(2n-1)}{2^n\cdot n!}x^n+...,x\in(-1;1].$$

IX. $f(x)=\ln(1+x)$:

$$\ln(1+x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\ldots+(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}+\ldots,$$

$x\in(-1;1]$.

X. $f(x)=\mathrm{arctg}x$:

$$\mathrm{arctg}x=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\ldots+(-1)^{n}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\ldots,$$

$x\in[-1;1]$.

XI. $f(x)=\arcsin x$:

$$\arcsin x=x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot3\cdot5\ldots(2n-1)}{2^n\cdot(2n+1)\cdot n!}x^{2n+1}=x-\frac{x^3}{2\cdot3\cdot1!}+\frac{1\cdot3\cdot x^5}{2^2\cdot5\cdot2!}+\ldots+$$

$$+\frac{1\cdot3\cdot5\cdot\ldots(2n-1)}{2^n\cdot(2n+1)\cdot n!}x^n+\ldots,x\in[-1;1].$$

Пример 44. Разложите в ряд Маклорена функцию $f(x)=\dfrac{x+13}{x^2-x-2}$ и найдите область сходимости полученного ряда к функции $f(x)$.

Решение. Разложим функцию $f(x)$ на сумму простейших правильных дробей:

$$f(x)=\frac{x+13}{x^2-x-2}=\frac{x+13}{(x+1)(x-2)}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x-2}=\frac{-4}{x+1}+\frac{5}{x-2}=$$

$$=-4\frac{1}{x+1}-\frac{5}{2}\frac{1}{1-\frac{x}{2}}.$$

Далее используем формулы VI и V из представленной в предыдущем пункте таблицы разложений функций в ряд Маклорена, причем в формуле V заменим x на $t\equiv x/2$:

$$f_1(x)\equiv-4\frac{1}{x+1}=-4\left(1-x+x^2+\ldots+(-1)^n x^n+\ldots\right)=\sum_{n=0}^{\infty}4(-1)^{n+1}x^n;$$

$$f_2(x)\equiv-\frac{5}{2}\frac{1}{1-t}=-\frac{5}{2}(1+t+t^2+\ldots+t^n+\ldots)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{5}{2^{n+1}}\right)x^n.$$

Укажем теперь область одновременной сходимости двух рядов:

$$\begin{cases} -1 < x < 1 \\ -1 < t(x) < 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -1 < x < 1 \\ -1 < x/2 < 1 \end{cases} \Rightarrow -2 < x < 2.$$

Следовательно, на интервале (–1;1) функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ можно почленно сложить:

$$\frac{x+13}{x^2-x-2} = -4\frac{1}{x+1} - \frac{5}{2}\frac{1}{1-t} = \sum_{n=0}^{\infty}\left[4(-1)^{n+1} - \frac{5}{2^{n+1}}\right]x^n.$$

Пример 45. Разложите в ряд Тейлора по степеням (x – 3) функцию из предыдущего примера $f(x) = \dfrac{x+13}{x^2-x-2}$ и найдите область сходимости полученного ряда к функции $f(x)$.

Решение. Произведем замену $x-3=t \Rightarrow x=t+3,$ тогда

$$f(x) = \frac{x+13}{x^2-x-2} = \frac{x+13}{(x+1)(x-2)} = \frac{x+13}{(x+1)(x-2)} = \frac{t+16}{(t+4)(t+1)} =$$

$$= \frac{5}{t+1} - \frac{4}{t+4} = \frac{5}{1+t} - \frac{1}{1+t/4} = 5\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n t^n - \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n (t/4)^n.$$

Укажем область одновременной сходимости двух рядов:

$$\begin{cases} -1 < t < 1 \\ -1 < t/4 < 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -1 < x-3 < 1 \\ -4 < x-3 < 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2 < x < 4 \\ -1 < x < 7 \end{cases} \Rightarrow -1 < x < 7.$$

Таким образом, на интервале (2;4 ряды можем почленно сложить:

$$f(x) = \frac{x+13}{x^2-x-2} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(5 - \frac{1}{4^n}\right)(x-3)^n.$$

Пример 46. Разложите функцию $f(x) = \dfrac{5-x^3}{8x-12-x^2}$ в ряд Тейлора в окрестности точки x_0 = 3 и найдите $f^{(33)}(3)$.

Решение. Представим исходную неправильную дробь в виде суммы многочлена и правильной дроби, и затем полученную правильную дробь разложим на простейшие правильные дроби:

$$f\left(x\right)=\frac{5-x^3}{8x-12-x^2}=x+8+\frac{64x-101}{\left(x-6\right)\left(x-2\right)}=$$

$$=x+8+\frac{\left(64x-128\right)+128-101}{\left(x-6\right)\left(x-2\right)}=x+8+\frac{64}{x-6}+\frac{27}{\left(x-6\right)\left(x-2\right)}=$$

$$=x+8+\frac{64}{x-6}+\frac{1}{4}\frac{27}{x-6}-\frac{27}{4}\frac{1}{x-2}=x+8+\frac{283}{4}\frac{1}{x-6}-\frac{27}{4}\frac{1}{x-2}=$$

$$=\left(x-3\right)+11+\frac{283}{4}\frac{1}{\left(x-3\right)-3}-\frac{27}{4}\frac{1}{\left(x-3\right)+1}=\left|x-3=t\right|=$$

$$=t+11+\frac{283}{4}\frac{1}{t-3}-\frac{27}{4}\frac{1}{1+t}=t+11-\frac{283}{12}\frac{1}{1-\left(t/3\right)}-\frac{27}{4}\frac{1}{1+t}=$$

$$=t+11-\frac{283}{12}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{t}{3}\right)^n-\frac{27}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-1\right)^n t^n=t+11-\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{283}{12}\frac{1}{3^n}+\left(-1\right)^n\frac{27}{4}\right)t^n.$$

Это и есть искомое разложение функции в ряд Тейлора по степеням $x-3=t$, которое справедливо в области $2<x<4$. Выпишем коэффициент ряда при степени $(x-3)^{33}$:

$$\frac{f^{(33)}\left(3\right)}{33!}=-\frac{283}{12}\frac{1}{3^{33}}-\frac{27}{4}\left(-1\right)=-\frac{283}{12}\frac{1}{3^{33}}+\frac{27}{4},$$

или,

$$f^{(33)}\left(3\right)=\left(-\frac{283}{12}\frac{1}{3^{33}}+\frac{27}{4}\right)\cdot 33!.$$

Пример 47. Разложите в ряд Маклорена функцию $f(x)=$ $=\ln(5+3x)$ и найдите область сходимости полученного ряда к функции $f(x)$.

Решение. Преобразуем функцию $f(x)$:

$$\ln\left(5+3x\right)=\ln\left(5\left(1+\frac{3}{5}x\right)\right)=\ln 5+\ln\left(1+\frac{3}{5}x\right).$$

Воспользуемся формулой (IX) из предыдущей таблицы разложений, и заменим x на $t=\frac{3}{5}x,$ в результате получим:

$$\ln\left(1+\frac{3}{5}x\right)=\ln\left(1+t\right)=t-\frac{1}{2}t^2+\frac{1}{3}t^3+\ldots+\frac{\left(-1\right)^{n+1}}{n}t^n+\ldots=$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(-1\right)^{n+1}3^n}{5^n\cdot n}x^n,$$

причем областью сходимости последнего ряда служит

$$-1 < t \le 1 \Rightarrow -1 < \frac{3}{5}x \le 1 \Rightarrow -\frac{5}{3} < x \le \frac{5}{3}.$$

Пример 48. Разложите в ряд Маклорена функцию $f(x) = \ln\left(x^2 - 5x + 4\right)$ и найдите область сходимости полученного ряда к функции $f(x)$.

Решение. Заметим, что функция определена в области $x \in (-\infty; 1) \cup (4; +\infty)$. Преобразуем функцию $f(x)$:

$$\ln\left(x^2 - 5x + 4\right) = \ln\left((x-1)(x-4)\right) = \ln\left(4(1-x)\left(1-\frac{x}{4}\right)\right) =$$

$$= \ln 4 + \ln(1-x) + \ln\left(1-\frac{x}{4}\right).$$

Следовательно, можем воспользоваться формулой (IX), в которой для разложения $f_1(x) = \ln(1-x)$ заменим x на $-x$, а для разложения $f_2(x) = \ln\left(1-\frac{x}{4}\right)$ заменим x на $-\frac{x}{4}$. В результате получим:

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \ldots - \frac{x^n}{n} - \ldots = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n},$$

причем $-1 < -x \le 1 \Rightarrow -1 \le x < 1$;

$$\ln\left(1-\frac{x}{4}\right) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{4^n \cdot n},$$

при этом последний ряд сходится при $-1 < -\frac{x}{4} \le 1 \Rightarrow -4 \le x < 4.$

Оба ряда одновременно сходятся на множестве $x \in [-1; 1)$, на котором ряды можно почленно сложить:

$$\ln\left(x^2 - 5x + 4\right) = \ln 4 + \ln(1-x) + \ln\left(1-\frac{x}{4}\right) = \ln 4 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\left(1+\frac{1}{4^n}\right)x^n.$$

Пример 49. Разложите в ряд Тейлора по степеням $(x + 5)$ функцию из предыдущего примера $f(x) = \ln(x^2 - 5x + 4)$ и найдите область сходимости полученного ряда к функции $f(x)$.

Решение. Сделаем замену $x+5=t \Rightarrow x=t-5$, тогда

$$f(x)=\ln\left(x^2-5x+4\right)=\ln 4+\ln(1-x)+\ln\left(1-\frac{x}{4}\right)=$$

$$=\ln 4+\ln(6-t)+\ln\left(\frac{9-t}{4}\right)=\ln\left(6\left(1-\frac{t}{6}\right)\right)+\ln\left(9\left(1-\frac{t}{9}\right)\right)=$$

$$=\ln 54+\ln\left(1-\frac{t}{6}\right)+\ln\left(1-\frac{t}{9}\right).$$

Воспользовавшись формулой (IX), разложим полученные функции в степенные ряды:

$$f_1(t)=\ln\left(1-\frac{t}{6}\right)=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^n}{6^n\cdot n}=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{6^n\cdot n}(x+5)^n,$$

причем $-1<-\frac{t}{6}\le 1 \Rightarrow -6\le t<6 \Rightarrow -11\le x<1;$

$$f_2(t)=\ln\left(1-\frac{t}{9}\right)=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^n}{9^n\cdot n}=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{9^n\cdot n}(x+5)^n,$$

при этом $-1<-\frac{t}{9}\le 1 \Rightarrow -9\le t<9 \Rightarrow -14\le x<4.$

Таким образом, разложение функции в ряд Тейлора имеет вид

$$f(x)=\ln\left(x^2-5x+4\right)=\ln 54-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{1}{9^n}+\frac{1}{6^n}\right)(x+5)^n,$$

и этот ряд сходится к функции $f(x)$ в области $-11\le x<1$.

Пример 50. Разложите в ряд Маклорена функцию $f(x)=\cos^2 x$ и укажите область сходимости полученного ряда к функции $f(x)$.

Решение. Преобразуем функцию $f(x)$:

$$\cos^2 x=\frac{1+\cos 2x}{2}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 2x.$$

Воспользуемся формулой (III) из предыдущей таблицы разложений, и заменим x на $t=2x$, в результате получим:

$$\cos^2 x=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos t=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\left(1-\frac{t^2}{2!}+\frac{t^4}{4!}+\ldots+(-1)^n\frac{t^{2n}}{(2n)!}+\ldots\right)=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2^{2n-1}x^{2n}}{(2n)!},\ x\in(-\infty;+\infty).$$

Пример 51. Разложите в ряд Тейлора по степеням $\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$ функцию из предыдущего примера $f(x)=\cos^2 x$ и укажите область сходимости полученного ряда к функции $f(x)$.

Решение. Сделаем замену $x-\frac{\pi}{3}=t\Rightarrow x=t+\frac{\pi}{3}$, тогда

$$f(x)=\cos^2 x=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 2x=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos\left(2t+\frac{2\pi}{3}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\cos 2t-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2t\right)=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\cos 2t-\frac{\sqrt{3}}{4}\sin 2t=$$

$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2^{2n}t^{2n}}{(2n)!}-\frac{\sqrt{3}}{4}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2^{2n+1}t^{2n+1}}{(2n+1)!}=$$

$$=\frac{1}{2}+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}2^{2n-2}\left(\frac{\left(x-\frac{\pi}{3}\right)^{2n}}{(2n)!}+\frac{2\sqrt{3}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)^{2n+1}}{(2n+1)!}\right),\ x\in(-\infty;+\infty).$$

Пример 52. Используя табличные разложения функций в ряд Маклорена, найдите $f^{(8)}(0)$ для функции $f(x)=x^2\operatorname{arctg}(x^2)$.

Решение. Разложим функцию $f(x)=x^2\operatorname{arctg}(x^2)$ в ряд Маклорена:

$$f(x)=x^2\operatorname{arctg}(x^2)=\left|t=x^2\right|=t\operatorname{arctg}t=\left|\begin{matrix}-1\le t\le 1,\\ -1\le x\le 1\end{matrix}\right|=t\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{t^{2n+1}}{2n+1}=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{t^{2n+2}}{2n+1}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{4n+4}}{2n+1}=x^4-\frac{x^8}{3}+o(x^8).$$

С другой стороны, запишем формулу разложения функции в ряд Маклорена:

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n.$$

Из сравнения двух последних формул получаем, что

$$\frac{f^{(8)}(0)}{8!} = -\frac{1}{3} \Rightarrow f^{(8)}(0) = -\frac{8!}{3} = -13440.$$

Вопросы и примеры для закрепления материала

Найдите радиус сходимости и область сходимости степенного ряда:

$$1)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+3)^n}{n};\ 2)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n (x+1)^n}{2n+3};\ 3)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n\sqrt{n}};$$

$$4)\ \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n \frac{x^n}{2^n};\ 5)\ \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n(x-2)^n;\ 6)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+2}{n(n+1)}x^n.$$

Разложите функцию в ряд Маклорена и найдите область сходимости ряда:

$$7)\ f(x) = \sin^2 2x;\ 8)\ f(x) = \frac{x}{x^2-4};\ 9)\ f(x) = \log_2\left(4-x^2\right).$$

Разложите функцию в ряд Тейлора в окрестности точки $x = x_0$ и найдите область сходимости этого ряда:

$$10)\ f(x) = \frac{1}{x^2}, x_0 = 2;\ 11)\ f(x) = \frac{1}{1+2x}, x_0 = 1;$$

$$12)\ f(x) = \ln(5x+3), x_0 = 2;\ 13)\ f(x) = \sin\frac{\pi x}{8}, x_0 = 2.$$

4. ПРИБЛИЖЕННЫЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ ЗНАЧЕНИЙ ФУНКЦИЙ И ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА С ПОМОЩЬЮ РЯДОВ

4.1. Приближенные вычисления значений (показательных, степенных, тригонометрических, логарифмических функций)

Пример 53. Вычислите e^{-1} с точностью до $\Delta = 0.01$.

Решение. Воспользуемся формулой (I) из вышеприведенной таблицы разложений, и заменим x на -1, в результате получим знакочередующийся сходящийся числовой ряд:

$$e^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} = 1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{5!} ... + \frac{(-1)^n}{n!} + ...$$

Согласно признаку Лейбница, оставим в сумме столько членов, пока абсолютная величина последующего члена окажется меньше либо равно $\Delta = 0.01$ (при округлении оставляем после запятой по крайней мере три знака!):

$$e^{-1} = 0.500 - 0.167 + 0.042 - 0.008 + ... \approx 0.500 - 0.167 + 0.042 = 0.38.$$

Пример 54. Вычислите $\cos 1$ с точностью до $\Delta = 0.01$.

Решение. Воспользуемся формулой (III) из таблицы разложений, и заменим x на 1, в результате получим знакочередующийся сходящийся числовой ряд:

$$\cos 1 = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n)!} = 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{4!} + ... + (-1)^n \frac{1}{(2n)!} + ...$$

Удержим в последней сумме столько членов, пока абсолютная величина последующего члена окажется не больше, чем $\Delta = 0.01$:

$$\cos 1 = 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{4!} + ... + (-1)^n \frac{1}{(2n)!} + ... \approx 1 - 0.500 + 0.042 - 0.001 = 0.54.$$

Пример 55. Вычислите $\sqrt{11}$ с точностью до $\Delta = 0.001$.

Решение. Предварительно преобразуем искомое число:

$$\sqrt{11} = \sqrt{9+2} = \sqrt{9\left(1+\frac{2}{3}\right)} = 3\sqrt{1+\frac{2}{3}},$$

и далее воспользуемся формулой (VII) из таблицы разложений

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2\cdot 1!}x - \frac{1}{2^2\cdot 2!}x^2 + \frac{1\cdot 3}{2^3\cdot 3!}x^3 + \ldots +$$
$$+(-1)^{n-1}\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots(2n-3)}{2^n\cdot n!}x^n + \ldots, x\in[-1;1]$$

В последней формуле заменим x на $\frac{2}{3}$, в результате получаем:

$$\sqrt{11} = 3\sqrt{1+\frac{2}{3}} = 3\left(1 + \frac{1}{2\cdot 1!}\frac{2}{9} - \frac{1}{2^2\cdot 2!}\left(\frac{2}{9}\right)^2 + \frac{1\cdot 3}{2^3\cdot 3!}\left(\frac{2}{9}\right)^3 + \ldots\right)$$

Таким образом, имеем знакочередующийся сходящийся числовой ряд. Следовательно, в нем возьмем столько членов, чтобы первый член отброшенной части по модулю был не больше $\Delta = 0.001$:

$$\sqrt{11} = 3(1 + 0.1111 - 0.0062 + 0.0007 + \ldots) \approx$$
$$\approx 3(1 + 0.1111 - 0.0062) = 3.315.$$

Пример 56. Вычислите ln2 с точностью до $\Delta = 0.0001$.

Решение. Для проведения вычислений формула (IX) из таблицы разложений

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} + \ldots, x\in(-1;1],$$

(в которой можем положить $x = 1$) не подходит, так как в этом случае нужно найти сумму достаточно большого числа слагаемых. Воспользуемся другой формулой

$$\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)=\ln(1+x)-\ln(1-x)=2\left(x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}...+\frac{x^{2n-1}}{2n-1}+...\right),x\in(-1;1]$$

Положим в последнем разложении $x = 1/3$:

$$\frac{1+x}{1-x}=2\Rightarrow 1+x=2-2x\Rightarrow x=\frac{1}{3}.$$

Тогда,

$$\ln 2=2\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3^3\cdot 5}+\frac{1}{3^5\cdot 5}+...+\frac{1}{3^{2n-1}\cdot(2n-1)}+...\right).$$

Число удерживаемых в последнем ряде членов определяется из неравенства относительно остатка ряда:

$$\frac{2\cdot|x|^{2n+1}}{(2n+1)(1-x^2)}<\Delta\Rightarrow\frac{2\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{2n+1}}{(2n+1)\frac{8}{3}}<0.0001.$$

Методом подбора находим, что $n = 4$, и получаем конечный результат:

$$\ln 2=2\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3^3\cdot 5}+\frac{1}{3^5\cdot 5}+\frac{1}{3^7\cdot 7}\right)=2\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{81}+\frac{1}{1215}+\frac{1}{15309}\right)\approx 0.6931.$$

4.2. Приближенные вычисления определенных интегралов

Для того, чтобы вычислить интеграл $\int_a^b f(x)dx$ с заданной точностью, разлагают подынтегральную функцию в степенной ряд, переставляют местами интегрирование и бесконечное суммирование, производят почленное интегрирование и в полученном ряде оставляют столько членов, которые обеспечивают вычисление данного интеграла с заданной точностью.

Пример 57. Вычислите $\int\limits_0^{1/2} e^{-x^2}dx$ с точностью до $\Delta = 0.001$.

Решение. Для проведения вычислений воспользуемся формулой (I) из таблицы разложений, в которой заменим x на $-x^2$:

$$e^{-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n}}{n!} = 1 - \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} ... + (-1)^n \frac{x^{2n}}{n!} + ..., \quad x \in (-\infty; +\infty).$$

Подставим в исходный интеграл, в результате получаем сходящийся знакочередующийся числовой ряд:

$$\int\limits_0^{1/2} e^{-x^2}dx = \int\limits_0^{1/2}\left(1 - \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} ... + (-1)^n \frac{x^{2n}}{n!} + ...\right)dx =$$
$$= \left(x - \frac{x^3}{3\cdot 1!} + \frac{x^5}{5\cdot 2!} - \frac{x^7}{7\cdot 3!} + ... + (-1)^n \frac{1}{n!}\frac{x^{2n+1}}{2n+1} + ...\right)\Bigg|_0^{1/2} =$$
$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^3 + \frac{1}{10}\left(\frac{1}{2}\right)^5 - \frac{1}{42}\left(\frac{1}{2}\right)^7 + ... + (-1)^n \frac{1}{n!}\frac{1}{2n+1}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n+1} + ... =$$
$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{24} + \frac{1}{320} - \frac{1}{5376} + ... = 0.5000 - 0.0417 + 0.0031 - 0.0002 + ... \approx$$
$$= 0.5000 - 0.0417 + 0.0031 = 0.461.$$

Пример 58. Вычислите интеграл $J = \int\limits_0^1 \sin x^4 dx$ с точностью до $\Delta = 0.0001$.

Решение. Воспользуемся формулой (II) из таблицы разложений, в которой заменим x на x^4:

$$\sin x^4 = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{8n+4}}{(2n+1)!} = x^4 - \frac{x^{12}}{3!} + \frac{x^{20}}{5!} + ... + (-1)^n \frac{x^{8n+4}}{(2n+1)!} + ...,$$
$$x \in (-\infty; +\infty)$$

и подставим в исходный интеграл, в результате получаем сходящийся знакочередующийся числовой ряд:

$$J=\int_0^1\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{8n+4}}{(2n+1)!}\right)dx=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\left(\int_0^1 x^{8n+4}dx\right)=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\frac{x^{8n+5}}{8n+5}\Bigg|_0^1=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\frac{1}{8n+5}=$$

$$=\frac{1}{1\cdot 5}-\frac{1}{3!\cdot 13}+\frac{1}{5!\cdot 21}-\frac{1}{7!\cdot 29}+\ldots=0.2000-0.0256+0.0032-0.0001+\ldots$$

$$=0.2000-0.0256+0.0032-0.0001=0.1775.$$

Пример 59. Вычислите интеграл $J=\int\limits_0^{1/4}\sqrt{1+x^3}\,dx$ с точностью до $\Delta=0.0001$.

Решение. Воспользуемся формулой (IV) из таблицы разложений функций в степенной ряд

$$(1+x)^{\alpha}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+$$

$$\ldots+\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+\ldots,x\in[-1;1],\alpha=1/2,$$

в которой заменим x на x^3, а α на 1/2:

$$f(x)=\sqrt{1+x^3}=1+\frac{1}{2}x^3-\frac{1}{2!\cdot 2^2}x^6+\frac{1\cdot 3}{3!\cdot 2^3}x^9+\ldots+$$

$$+(-1)^{n-1}\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot|2n-3|}{n!\cdot 2^n}x^{3n}+\ldots$$

Подставим последнее в исходный интеграл и поменяем местами операции интегрирования и суммирования (в силу теоремы 3 о почленном интегрировании по любому отрезку, лежащему внутри интервала сходимости):

$$J=\int_0^{1/4}\sqrt{1+x^3}\,dx=\int_0^{1/4}\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot|2n-3|}{n!\cdot 2^n}x^{3n}\right)dx=$$

$$=\frac{1}{4}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot|2n-3|}{n!\cdot2^n}\left.\frac{x^{3n+1}}{3n+1}\right|_0^{1/4}=$$

$$=\frac{1}{4}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot|2n-3|}{n!\cdot2^n}\frac{1}{(3n+1)4^{3n+1}}=$$

$$=\frac{1}{4}+\frac{1}{1!\cdot2\cdot4\cdot4^4}-\frac{1}{2!\cdot2^2\cdot7\cdot4^7}+\ldots=0.2500+0.0005-0.000002+\ldots\approx$$

$$\approx0.2500+0.0005=0.2505.$$

Отметим, что данный интеграл можем оценить снизу, используя свойства определенного интеграла:

$$f(x)=\sqrt{1+x^3}\,(\nearrow)\quad \text{на}\quad [0;1/4],\quad \text{и}\quad 1\le f(x)\le\frac{\sqrt{65}}{8}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{1}{4}\le\int_0^{1/4}\sqrt{1+x^3}\,dx\le\frac{\sqrt{65}}{32}.$$

4.3. Интегрирование дифференциальных уравнений с помощью степенных рядов

Степенные ряды широко применяются при решении дифференциальных уравнений. Для целого ряда дифференциальных уравнений показано, что решение $y(x)$ представимо в виде степенного ряда

$$y(x)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k(x-x_0)^k=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{y^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k. \qquad (18)$$

Пример 60. Найти решение (в виде степенного ряда) уравнения

$y''-xy'+y=1$, удовлетворяющее условиям $y(0)=y'(0)=0$.

Решение. Ищем решение в виде ряда $y(x)=\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^k$, в котором в силу условий $y(0)=y'(0)=0$ имеем $a_0=a_1=0$. Следовательно, $y(x)=\sum_{k=2}^{\infty}a_kx^k$. Подставив это выражение в уравнение, получаем

$$\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)a_k x^{k-2} - \sum_{k=2}^{\infty} ka_k x^k + \sum_{k=2}^{\infty} a_k x^k = 1.$$

Отсюда находим, что $2 \cdot 1 \cdot a_2 = 1$, т.е. $a_2 = \dfrac{1}{1 \cdot 2}$, и $(k+1)(k+2)\, a_{k+2} = (k-1)\, a_k$ для $k = 1, 2, \ldots$ Так как $a_1 = 0$, то $a_{2m+1} = 0$ для всех $m = 0, 1, \ldots$, а для $k = 2m$, $m = 1, 2, \ldots$, получаем рекуррентную формулу

$$a_{2(m+1)} = \frac{(2m-1)a_{2m}}{(2m+1)(2m+2)},\ m = 1, 2, \ldots,$$

из которой выводим равенства

$$a_{2(m+1)} = \frac{(2m-1)!!}{(2m+2)!}.$$

Следовательно, искомое решение имеет вид

$$y(x) = \frac{x^2}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(2m-1)!!}{(2m+2)!} x^{2m+2},$$

причем полученный ряд сходится при всех $x \in R$.

Вопросы и примеры для закрепления материала

Найдите значение выражения с указанной точностью Δ, используя разложения функций в степенной ряд:

1) $\cos 18^0, \Delta = 0.001$; 2) $\ln 3, \Delta = 0.01$;
3) $\sqrt[6]{7}, \Delta = 0.01$; 4) $\sqrt[5]{e}, \Delta = 0.001$.

Вычислите интеграл $\int_a^b f(x)dx$ с указанной точностью Δ, предварительно разложив подынтегральную функцию в степенной ряд:

5) $\int_{0}^{1} \sqrt{x} \cos x dx, \Delta = 0.001;$ 6) $\int_{0}^{1/9} \sqrt{x} e^{x} dx, \Delta = 0.001;$

7) $\int_{0}^{1/2} \sqrt{1+4x^6} dx, \Delta = 0.001;$ 8) $\int_{0}^{0.1} \ln\left(1+x^4\right) dx, \Delta = 0.0001.$

Найдите решения уравнений, удовлетворяющие заданным условиям:

9) $y'' + xy' + y = 1,\ y(0) = y'(0) = 0.$

10) $y'' - xy' + y = x,\ y(0) = y'(0) = 0.$

5. РЕКОМЕНДУЕМЫЕ ЗАДАЧИ. РАЗБОР ВАРИАНТА РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКОГО ЗАДАНИЯ

Этот раздел содержит решение типового варианта расчетно-графической работы.

Задание 1. Найдите сумму ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}.$$

Применяя предварительно признаки сходимости, убедитесь в сходимости данного числового ряда.

Решение.

$$a_n=\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}\sim\frac{1}{4n^2}.$$

Обозначим $b_n=\dfrac{1}{n^2}$ и рассмотрим знакоположительный числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$, который совпадает с эталонным, сходящимся рядом Дирихле. Так как $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2}{(2n-1)(2n+1)}=\dfrac{1}{4}\neq 0$, то, согласно предельного признака сравнения, ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ ведут одинаково по отношению к сходимости. Следовательно, **исходный ряд тоже сходится**.

Так как $\dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2n-1}-\dfrac{1}{2n+1}\right)$, то можем записать:

$$k=1\colon a_k\equiv\frac{1}{1\cdot 3}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}\right);$$

$$k=2\colon a_k\equiv\frac{1}{3\cdot 5}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right);$$

…………………………………

$$k=n\colon a_n\equiv\frac{1}{(2n-1)\cdot(2n+1)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right).$$

Просуммируем левые и правые части последних равенств, в результате для частичной суммы ряда получим:

$$S_n \equiv \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2n+1}\right),$$

причем

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2n+1}\right) = \frac{1}{2}.$$

Следовательно, **для суммы ряда**, согласно определению, **имеем**:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{2}.$$

Задание 2. Используя известные признаки сходимости, исследуйте на сходимость числовые ряды:

$$2.1)\ \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{5}{6}\right)^n;\ \ 2.1)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+2}{5n+3};\ \ 2.3)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n + 1}{n\sqrt[3]{n}}.$$

Решение.

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{5}{6}\right)^n$ сходится и представляет сумму членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии $\left(b_1 = q = \frac{5}{6}\right)$, причем эта сумма равна $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{5}{6}\right)^n = \frac{b_1}{1-q} = 5.$

Второй ряд расходится, так как не выполняется необходимый признак сходимости:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\frac{n+2}{5n+3} = \frac{1}{5} \neq 0.$$

Третий ряд, в силу первого признака сравнения, сходится:

$$0 \le a_n \equiv \frac{\sin n + 1}{n\sqrt[3]{n}} \le \frac{2}{n^{4/3}} = b_n,$$

причем ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ — эталонный, сходящийся ряд Дирихле.

Задание 3. Вычислите сумму ряда с заданной точностью Δ:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n^3 + 46}, \Delta = 0.01.$$

Решение.

Нетрудно убедиться, что данный ряд сходится абсолютно. Следовательно, исходный ряд также сходится. Выясним, сколько членов ряда необходимо сохранить, чтобы вычислить сумму ряда с заданной точностью. Так как $|S - S_n| < u_{n+1}$, то достаточно выполнение условия

$$u_{n+1} < \Delta \Rightarrow \frac{1}{2(n+1)^3 + 46} < 0.01 \Rightarrow 2(n+1)^3 > 54 \Rightarrow n > 2.$$

Таким образом, достаточно вычислить сумму ряда, удержав три первых члена:

$$S = -\frac{1}{2+46} + \frac{1}{2 \cdot 8 + 46} - \frac{1}{2 \cdot 27 + 46} =$$
$$= -0.020 + 0.016 - 0.010 = -0.014.$$

Задание 4. Найдите радиус сходимости степенного ряда, укажите область его сходимости:

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n \cdot 2^n}.$$

Решение.

Найдем интервал сходимости степенного ряда (т.е. множество значений x, при которых степенной ряд сходится):

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{|x|n}{(n+1)2} = \frac{|x|}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1} = \frac{|x|}{2}.$$

И, согласно признаку Даламбера, можем утверждать, что ряд сходится, притом абсолютно, если $\frac{|x|}{2} < 1 \Rightarrow |x| < 2 \Rightarrow -2 < x < 2.$

Следовательно, радиус сходимости равен $R = 2.$ Дополнительно исследуем поведение ряда на концах полученного интервала:

при $x = 2$ имеем гармонический ряд $\left(a_n = \frac{1}{2}\right),$ который расходится;

при $x = -2$ получаем знакочередующийся ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n},$ который в соответствии с признаком Лейбница, сходится.

Итак, **исходный ряд сходится при** $-2 \le x < 2.$

Задание 5. Используя известное разложение в ряд Тейлора (Маклорена), вычислите выражение $\sqrt[3]{30}$ с заданной точностью $\Delta = 0.001$.

Решение.

$$\sqrt[3]{30} = (27+3)^{1/3} = \left(3^3\left(1+\frac{1}{9}\right)\right)^{1/3} = 3\left(1+\frac{1}{9}\right)^{1/3}.$$

Воспользуемся разложением степенной функции в ряд Тейлора:

$$(1+x)^m = 1 + \frac{m}{1!}x + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{m(m-1)\ldots[m-(n-1)]}{n!}x^n + \ldots,$$

причем этот ряд сходится при $-1 \le x < 1.$ Полагая $x = 1/9, m = 1/3,$ получаем

$$\sqrt[3]{30} = 3\left(1+\frac{1}{9}\right)^{1/3} = 1 + \frac{1}{3\cdot 1!}\frac{1}{9} + \frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)}{2!}\left(\frac{1}{9}\right)^2 + \frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)\left(\frac{1}{3}-2\right)}{3!}\left(\frac{1}{9}\right)^3 + \ldots =$$

$$=1+\frac{1}{81}-\frac{1}{729}+\frac{5}{32805}+\ldots\approx 1+0.012-0.001=1.011.$$

При этом мы воспользовались признаком Лейбница, согласно которому: если в сходящемся знакочередующемся ряде мы заменим его сумму на некоторую частичную сумму, то при этом совершаем ошибку, по абсолютной величине не превышающую первого из отброшенных членов.

Задание 6. Вычислите приближенное значение определенного интеграла $\int\limits_0^2 \frac{\sin x}{x}dx$ с указанной точностью $\Delta=0.01$, предварительно разложив подинтегральную функцию в ряд Тейлора (Маклорена):

Решение.

Воспользуемся разложением в ряд Маклорена функции sin$x$:

$$\sin x=\frac{x}{1!}-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}=x\left[1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n+1)!}\right],$$

причем данный ряд сходится при всех значениях x. Тогда,

$$\frac{\sin x}{x}=1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n+1)!}.$$

Полученный ряд сходится в области $x\in(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$, следовательно, область интегрирования принадлежит области сходимости степенного ряда. И потому, согласно теореме 3 о степенных рядах, можем переставить местами интегрирование и (бесконечное) суммирование, в результате получаем:

$$\int\limits_0^2\frac{\sin x}{x}dx=\int\limits_0^2\left[1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n+1)!}\right]dx=x+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!(2n+1)}\Bigg|_{x=0}^{x=2}=$$

$$=2-\frac{2^3}{3!\cdot 3}+\frac{2^5}{5!\cdot 5}-\frac{2^7}{7!\cdot 7}+\ldots=2-0.444+0.533-0.004\approx 2.09.$$

6. ВАРИАНТЫ РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКОГО ЗАДАНИЯ

Условия к заданиям приведены в разделе 1. В задании 1 требуется найти сумму числового ряда, предварительно обосновав его сходимость. В задании 2 проведите исследование на сходимость числовых рядов, используя известные признаки сходимости. В задании 3 нужно определить радиус сходимости степенного ряда и указать область его сходимости. В задании 4, используя известное разложение в ряд Тейлора, требуется вычислить указанное выражение с заданной точностью. В задании 5 нужно вычислить приближенное значение определенного интеграла с указанной точностью, предварительно разложив подынтегральную функцию в ряд Тейлора.

Вариант 1

Задание 1. Найдите сумму числового ряда, предварительно обосновав его сходимость:

$$\frac{5}{6}+\frac{13}{36}+\frac{35}{216}+\ldots+\frac{2^n+3^n}{6^n}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n+3^n}{6^n}.$$

Задание 2. Исследуйте на сходимость числовые ряды, используя известные признаки сходимости:

$$2.1)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n!};\ 2.2)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^3 n+5}{n^2};\ 2.3)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+3}{4n-1}.$$

Задание 3. Вычислите сумму ряда с заданной точностью Δ:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^3+3},\Delta=0.01.$$

Задание 4. Определите радиус сходимости степенного ряда и укажите область его сходимости:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{n \cdot 5^n}.$$

Задание 5. Используя разложение функции e^x в ряд Маклорена, вычислите приближенно e^{-2} с заданной точностью $\Delta = 0.001$.

Задание 6. Разложите подынтегральную функцию в ряд Маклорена и вычислите приближенно интеграл $\int\limits_0^{0.5} \frac{dx}{1+x^4}$ с заданной точностью $\Delta = 0.001$.

Вариант 2

Задание 1. Найдите сумму числового ряда, предварительно обосновав его сходимость:

$$\frac{4}{4\times 5} + \frac{4}{5\times 6} + \frac{4}{6\times 7} + \ldots + \frac{4}{(n+3)(n+4)} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{(n+3)(n+4)}.$$

Задание 2. Исследуйте на сходимость числовые ряды, используя известные признаки сходимости:

$$2.1)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{3n+7};\ \ 2.2)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n};\ \ 2.3)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2-\sin^2 n}{n^3}.$$

Задание 3. Вычислите сумму ряда с заданной точностью Δ:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{3n^4+8}, \Delta = 0.001.$$

Задание 4. Определите радиус сходимости степенного ряда и укажите область его сходимости:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x-7)^n}{n+5}.$$

Задание 5. Используя разложение функции $\cos x$ в ряд Маклорена, вычислите приближенно $\cos 1$ с заданной точностью $\Delta = 0.01$.

Задание 6. Разложите подынтегральную функцию в ряд Маклорена и вычислите приближенно интеграл $\int\limits_0^1 e^{-x^2}dx$ с заданной точностью $\Delta = 0.0001$.

Вариант 3

Задание 1. Найдите сумму числового ряда, предварительно обосновав его сходимость:

$$\frac{2}{1\times 3}+\frac{2}{3\times 5}+\frac{2}{5\times 7}+\ldots+\frac{2}{(2n-1)(2n+1)}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{(2n-1)(2n+1)}.$$

Задание 2. Исследуйте на сходимость числовые ряды, используя известные признаки сходимости:

$$2.1)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+2}{n^4+2};\ 2.2)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{3n+3};\ 2.3)\ \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n.$$

Задание 3. Вычислите сумму ряда с заданной точностью Δ:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{6n^5+5},\ \Delta = 0.0001.$$

Задание 4. Определите радиус сходимости степенного ряда и укажите область его сходимости:

$$\sum_{n=1}^{\infty}3^n x^n.$$

Задание 5. Используя разложение функции $\sin x$ в ряд Маклорена, вычислите приближенно $\sin 1$ с заданной точностью $\Delta = 0.01$.

Задание 6. Разложите подынтегральную функцию в ряд Маклорена и вычислите приближенно интеграл $\int\limits_0^1 \cos\sqrt{x}dx$ с заданной точностью $\Delta = 0.001$.

Вариант 4

Задание 1. Найдите сумму числового ряда, предварительно обосновав его сходимость:

$$\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\frac{1}{3\times 4}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}.$$

Задание 2. Исследуйте на сходимость числовые ряды, используя известные признаки сходимости:

$$2.1)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos^3 n+7}{n^3};\ 2.2)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n \sin n}{n^2};\ 2.3)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mathrm{arctg} n}{2n}.$$

Задание 3. Вычислите сумму ряда с заданной точностью Δ:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{10n^2+95}, \Delta = 0.001.$$

Задание 4. Определите радиус сходимости степенного ряда и укажите область его сходимости:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n+1}\left(\frac{x}{2}\right)^n.$$

Задание 5. Используя разложение функции $\cos x$ в ряд Маклорена, вычислите приближенно $\cos 10^0$ с заданной точностью $\Delta = 0.0001$.

Задание 6. Разложите подынтегральную функцию в ряд Маклорена и вычислите приближенно интеграл $\int\limits_0^{0.25} \ln(1+\sqrt{x})dx$ с заданной точностью $\Delta = 0.001$.

Вариант 5

Задание 1. Найдите сумму числового ряда, предварительно обосновав его сходимость:

$$1+\frac{2}{3}+\frac{4}{9}+\ldots+\frac{2^n}{3^n}+\ldots.=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n.$$

Задание 2. Исследуйте на сходимость числовые ряды, используя известные признаки сходимости:

$$2.1)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n};\ 2.2)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{3n+3};\ 2.3)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{5n}}.$$

Задание 3. Вычислите сумму ряда с заданной точностью Δ:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^5+3},\ \Delta = 0.001.$$

Задание 4. Определите радиус сходимости степенного ряда и укажите область его сходимости:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+3)^n}{n^2}.$$

Задание 5. Используя разложение функции e^x в ряд Маклорена, вычислите приближенно $\sqrt{e}$ с заданной точностью $\Delta = 0.0001$.

Задание 6. Разложите подынтегральную функцию в ряд Маклорена и вычислите приближенно интеграл $\int_0^{0.5} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} dx$ с заданной точностью $\Delta = 0.001$.

Вариант 6

Задание 1. Найдите сумму числового ряда, предварительно обосновав его сходимость:

$$\frac{3}{5} + \frac{9}{25} + \frac{27}{125} + \ldots + \frac{3^n}{5^n} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{5}\right)^n.$$

Задание 2. Исследуйте на сходимость числовые ряды, используя известные признаки сходимости:

$$2.1)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \ln n};\ \ 2.2)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+3};\ \ 2.3)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+2n+3}.$$

Задание 3. Вычислите сумму ряда с заданной точностью Δ:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{12n^2+8}, \Delta = 0.001.$$

Задание 4. Определите радиус сходимости степенного ряда и укажите область его сходимости:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{2^n}.$$

Задание 5. Используя разложение функции $\sin x$ в ряд Маклорена, вычислите приближенно $\sin 1^0$ с заданной точностью $\Delta = 0.0001$.

Задание 6. Разложите подынтегральную функцию в ряд Маклорена и вычислите приближенно интеграл $\int\limits_0^{0.5} e^{\sqrt{x}}dx$ с заданной точностью $\Delta = 0.01$.

Вариант 7

Задание 1. Найдите сумму числового ряда, предварительно обосновав его сходимость:

$$1 + \frac{2}{5} + \frac{4}{25} + \ldots + \left(\frac{2}{5}\right)^{n-1} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{5}\right)^{n-1}.$$

Задание 2. Исследуйте на сходимость числовые ряды, используя известные признаки сходимости:

$$2.1)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^{2n}}{n!};\ 2.2)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n + 2}{n^2 + 3};\ 2.3)\ \sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{n^2 + n} - n\right).$$

Задание 3. Вычислите сумму ряда с заданной точностью Δ:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{9n^3 + 2}, \Delta = 0.001.$$

Задание 4. Определите радиус сходимости степенного ряда и укажите область его сходимости:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n^2}.$$

Задание 5. Используя разложение функции $\cos x$ в ряд Маклорена, вычислите приближенно $\cos 1$ с заданной точностью $\Delta = 0.00001$.

Задание 6. Разложите подынтегральную функцию в ряд Маклорена и вычислите приближенно интеграл $\int\limits_0^{0.25} \ln\left(1+\sqrt{x}\right)dx$ с заданной точностью $\Delta = 0.001$.

Вариант 8

Задание 1. Найдите сумму числового ряда, предварительно обосновав его сходимость:

$$\frac{1}{7}+\frac{5}{49}+\ldots+\frac{3^n-2^n}{7^n}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n-2^n}{7^n}.$$

Задание 2. Исследуйте на сходимость числовые ряды, используя известные признаки сходимости:

$$2.1)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n^5};\ 2.2)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n+2}{5n+3};\ 2.3)\ \sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{n^4+3}-n^2\right).$$

Задание 3. Вычислите сумму ряда с заданной точностью Δ:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{3n^4+1},\ \Delta = 0.001.$$

Задание 4. Определите радиус сходимости степенного ряда и укажите область его сходимости:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{n!}x^n.$$

Задание 5. Используя разложение функции $\left(1+x\right)^m$ в ряд Маклорена, вычислите приближенно $\sqrt{70}$ с заданной точностью $\Delta = 0.001$.

Задание 6. Разложите подынтегральную функцию в ряд Маклорена и вычислите приближенно интеграл $\int\limits_0^{\pi/4} \sin\left(x^2\right)dx$ с заданной точностью $\Delta = 0.0001$.

Вариант 9

Задание 1. Найдите сумму числового ряда, предварительно обосновав его сходимость:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^n}-\frac{1}{2^{n-3}}\right).$$

Задание 2. Исследуйте на сходимость числовые ряды, используя известные признаки сходимости:

$$2.1)\ \sum_{n=1}^{\infty} n\left(\sqrt{n^2+2}-n\right);\ 2.2)\ \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{5}{7}\right)^{2n};\ 2.3)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin\frac{1}{n}.$$

Задание 3. Вычислите сумму ряда с заданной точностью Δ:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^5+20},\ \Delta = 0.001.$$

Задание 4. Определите радиус сходимости степенного ряда и укажите область его сходимости:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-5)^n}{2^{2n}}.$$

Задание 5. Используя разложение функции $\sin x$ в ряд Маклорена, вычислите приближенно $\sin 18^{\circ}$ с заданной точностью $\Delta = 0.0001$.

Задание 6. Разложите подынтегральную функцию в ряд Маклорена и вычислите приближенно интеграл $\int\limits_0^{1/5} \cos\left(4x^2\right) dx$ с заданной точностью $\Delta = 10^{-6}$.

Вариант 10

Задание 1. Найдите сумму числового ряда, предварительно обосновав его сходимость:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 7n + 12}.$$

Задание 2. Исследуйте на сходимость числовые ряды, используя известные признаки сходимости:

$$2.1)\ \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{n+1}\right)^2;\ 2.2)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cos\frac{1}{n};\ 2.3)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^{2n}}{n!}.$$

Задание 3. Вычислите сумму ряда с заданной точностью Δ:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{8n^3 - 2}, \Delta = 0.01.$$

Задание 4. Определите радиус сходимости степенного ряда и укажите область его сходимости:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{(2n-1) \cdot 2^n}.$$

Задание 5. Используя разложение функции $\left(1+x\right)^m$ в ряд Маклорена, вычислите приближенно $\sqrt[3]{2}$ с заданной точностью $\Delta = 0.001$.

Задание 6. Разложите подынтегральную функцию в ряд Маклорена и вычислите приближенно интеграл $\int\limits_0^{1/5} \sin\left(2x^2\right)dx$ с заданной точностью $\Delta = 10^{-6}$.

Вариант 11

Задание 1. Найдите сумму числового ряда, предварительно обосновав его сходимость:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\left(3n+2\right)\left(3n-1\right)}.$$

Задание 2. Исследуйте на сходимость числовые ряды, используя известные признаки сходимости:

$$2.1)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n+1}{n^2};\ \ 2.2)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n-2}{5n+4};\ \ 2.3)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}.$$

Задание 3. Вычислите сумму ряда с заданной точностью Δ:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{15n^2+9}, \Delta = 0.001.$$

Задание 4. Определите радиус сходимости степенного ряда и укажите область его сходимости:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+3)^n}{n+5}.$$

Задание 5. Используя разложение функции $\ln\left(1+x\right)$ в ряд Маклорена, вычислите приближенно ln5 с заданной точностью $\Delta = 0.001$.

Задание 6. Разложите подынтегральную функцию в ряд Маклорена и вычислите приближенно интеграл $\int\limits_0^{1/4} e^{-6x^2}\,dx$ с заданной точностью $\Delta = 10^{-5}$.

Вариант 12

Задание 1. Найдите сумму числового ряда, предварительно обосновав его сходимость:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{6^n}-\frac{1}{6^{n+3}}\right).$$

Задание 2. Исследуйте на сходимость числовые ряды, используя известные признаки сходимости:

$$2.1)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{(n+1)!};\ 2.2)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{3n+5};\ 2.3)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln 2n}{n}.$$

Задание 3. Вычислите сумму ряда с заданной точностью Δ:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^3+25},\ \Delta = 0.01.$$

Задание 4. Определите радиус сходимости степенного ряда и укажите область его сходимости:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-7)^n}{5n-1}.$$

Задание 5. Используя разложение функции $(1+x)^m$ в ряд Маклорена, вычислите приближенно $\sqrt{11}$ с заданной точностью $\Delta = 0.001$.

Задание 6. Разложите подынтегральную функцию в ряд Маклорена и вычислите приближенно интеграл $\int\limits_0^{1/2} x^2 \ln\left(1+x^4\right)dx$ с заданной точностью $\Delta = 10^{-6}$.

Вариант 13

Задание 1. Найдите сумму числового ряда, предварительно обосновав его сходимость:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+n}.$$

Задание 2. Исследуйте на сходимость числовые ряды, используя известные признаки сходимости:

$$2.1)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n^5};\ 2.2)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n+2}{5n+3};\ 2.3)\ \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n-1}{4n+2}\right)^n.$$

Задание 3. Вычислите сумму ряда с заданной точностью Δ:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}n}{3^n}, \Delta = 0.01.$$

Задание 4. Определите радиус сходимости степенного ряда и укажите область его сходимости:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}.$$

Задание 5. Используя разложение функции $\left(1+x\right)^m$ в ряд Маклорена, вычислите приближенно $\sqrt[6]{7}$ с заданной точностью $\Delta = 0.01$.

Задание 6. Разложите подынтегральную функцию в ряд Маклорена и вычислите приближенно интеграл $\int\limits_0^{1/3} e^{-3x^2}\,dx$ с заданной точностью $\Delta = 10^{-6}$.

Вариант 14

Задание 1. Найдите сумму числового ряда, предварительно обосновав его сходимость:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5 \cdot 2^n - 3^n}{6^n}.$$

Задание 2. Исследуйте на сходимость числовые ряды, используя известные признаки сходимости:

$$2.1)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{n^4};\ \ 2.2)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^3 + 2}{5n^3 + 5};\ \ 2.3)\ \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\sin n}{n}\right)^2.$$

Задание 3. Вычислите сумму ряда с заданной точностью Δ:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{8n^2 - 3}, \Delta = 0.01.$$

Задание 4. Определите радиус сходимости степенного ряда и укажите область его сходимости:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)!}{5^n} x^n.$$

Задание 5. Используя разложение функции $\sin x$ в ряд Маклорена, вычислите приближенно $\sin 15^0$ с заданной точностью $\Delta = 0.001$.

Задание 6. Разложите подынтегральную функцию в ряд Маклорена и вычислите приближенно интеграл $\int\limits_0^{0.4} \frac{dx}{\sqrt[6]{1+2x^4}}$ с заданной точностью $\Delta = 10^{-5}$.

Вариант 15

Задание 1. Найдите сумму числового ряда, предварительно обосновав его сходимость:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2 - 1}.$$

Задание 2. Исследуйте на сходимость числовые ряды, используя известные признаки сходимости:

$$2.1)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^4};\ 2.2)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n+2}{5n^3+1};\ 2.3)\ \sum_{n=1}^{\infty} n \sin\frac{1}{2n}.$$

Задание 3. Вычислите сумму ряда с заданной точностью Δ:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3n^2+2}, \Delta = 0.01.$$

Задание 4. Определите радиус сходимости степенного ряда и укажите область его сходимости:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(x+5\right)^{2n}}{25^n}.$$

Задание 5. Используя разложение функции $\cos x$ в ряд Маклорена, вычислите приближенно $\cos 18^0$ с заданной точностью $\Delta = 0.001$.

Задание 6. Разложите подынтегральную функцию в ряд Маклорена и вычислите приближенно интеграл $\int\limits_0^{1/3} x^2 \ln\left(1+x^2\right)dx$ с заданной точностью $\Delta = 10^{-5}$.

Вариант 16

Задание 1. Найдите сумму числового ряда, предварительно обосновав его сходимость:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+3n}.$$

Задание 2. Исследуйте на сходимость числовые ряды, используя известные признаки сходимости:

$$2.1)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n^3};\ 2.2)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n+2}{5n+3};\ 2.3)\ \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n^2}{n^3+5}\right)^2.$$

Задание 3. Вычислите сумму ряда с заданной точностью Δ:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+50}, \Delta = 0.01.$$

Задание 4. Определите радиус сходимости степенного ряда и укажите область его сходимости:

$$\sum_{n=0}^{\infty} 3^n \left(x-2\right)^{n^3}.$$

Задание 5. Используя разложение функции $\left(1+x\right)^m$ в ряд Маклорена, вычислите приближенно $\sqrt[8]{19}$ с заданной точностью $\Delta = 0.001$.

Задание 6. Разложите подынтегральную функцию в ряд Маклорена и вычислите приближенно интеграл $\int_0^{1/2} \cos 6x^2 dx$ с заданной точностью $\Delta = 10^{-6}$.

Вариант 17

Задание 1. Найдите сумму числового ряда, предварительно обосновав его сходимость:

$$\sum_{n=1}^{\infty} 3 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^{2n}.$$

Задание 2. Исследуйте на сходимость числовые ряды, используя известные признаки сходимости:

$$2.1)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!};\ 2.2)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n+2}{n^3+5};\ 2.3)\ \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{n^2+3n} - n\right).$$

Задание 3. Вычислите сумму ряда с заданной точностью Δ:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n^4+9}, \Delta = 0.001.$$

Задание 4. Определите радиус сходимости степенного ряда и укажите область его сходимости:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+4}{9n-1}\right)^n (x-1)^{2n}.$$

Задание 5. Используя разложение функции e^x в ряд Маклорена, вычислите приближенно $e^{-1/2}$ с заданной точностью $\Delta = 0.01$.

Задание 6. Разложите подынтегральную функцию в ряд Маклорена и вычислите приближенно интеграл $\int_0^{1/3} \sin 6x^2 dx$ с заданной точностью $\Delta = 10^{-5}$.

Вариант 18

Задание 1. Найдите сумму числового ряда, предварительно обосновав его сходимость:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 2n}.$$

Задание 2. Исследуйте на сходимость числовые ряды, используя известные признаки сходимости:

$$2.1)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n^5};\ 2.2)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{6n+1};\ 2.3)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3 - \sin 2n}{2^{2n}}.$$

Задание 3. Вычислите сумму ряда с заданной точностью Δ:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{3n^4 + 6}, \Delta = 0.001.$$

Задание 4. Определите радиус сходимости степенного ряда и укажите область его сходимости:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 + 3} (x+3)^n.$$

Задание 5. Используя разложение функции $\sin x$ в ряд Маклорена, вычислите приближенно $\sin 5^0$ с заданной точностью $\Delta = 0.001$.

Задание 6. Разложите подынтегральную функцию в ряд Маклорена и вычислите приближенно интеграл $\int_0^{1/2} e^{-4x^2} dx$ с заданной точностью $\Delta = 0.0001$.

Вариант 19

Задание 1. Найдите сумму числового ряда, предварительно обосновав его сходимость:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^2+3^n}{2^{3n}}.$$

Задание 2. Исследуйте на сходимость числовые ряды, используя известные признаки сходимости:

$$2.1)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{2^n\left(2n+1\right)};\ 2.2)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{6n^3+5n};\ 2.3)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(-1\right)^{n+1}}{\sqrt{n^2+5}}.$$

Задание 3. Вычислите сумму ряда с заданной точностью Δ:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^4+5},\ \Delta=0.01.$$

Задание 4. Определите радиус сходимости степенного ряда и укажите область его сходимости:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(3n-2\right)}{\left(n+1\right)^2 2^{n+1}}\left(x-3\right)^n.$$

Задание 5. Разложите функцию $y=\ln\left(1-x-12x^2\right)$ в ряд Маклорена, найдите область сходимости этого ряда.

Задание 6. Разложите подынтегральную функцию в ряд Маклорена и вычислите приближенно интеграл $\int_0^1\frac{dx}{\sqrt[4]{16+x^4}}$ с заданной точностью $\Delta=0.001$.

Вариант 20

Задание 1. Найдите сумму числового ряда, предварительно обосновав его сходимость:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+7n+12}.$$

Задание 2. Исследуйте на сходимость числовые ряды, используя известные признаки сходимости:

$$2.1)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^5}{2^n};\ 2.2)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)!}{6^n};\ 2.3)\ \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\sin\frac{1}{n}.$$

Задание 3. Вычислите сумму ряда с заданной точностью Δ:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{5n^2+3},\Delta=0.01.$$

Задание 4. Определите радиус сходимости степенного ряда и укажите область его сходимости:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+2}{n(n+1)}(x+5)^n.$$

Задание 5. Разложите функцию $y=2x\cos^2\frac{x}{2}-x$ в ряд Маклорена, и укажите область сходимости этого ряда.

Задание 6. Разложите подынтегральную функцию в ряд Маклорена и вычислите приближенно интеграл $\int_0^{0.2}e^{-3x^2}dx$ с заданной точностью $\Delta=0.001$.

ТЕСТЫ

Секция 1. Числовые ряды. Сумма ряда. Признаки сходимости

Задание 1. Пользуясь одним из признаков сходимости, убедитесь в сходимости числового ряда

$$\frac{2}{1\times 3}+\frac{2}{3\times 5}+\frac{2}{5\times 7}+\ldots+\frac{2}{(2n-1)(2n+1)}+\ldots$$

Найдите и запишите ее сумму.

Задание 2. Пользуясь одним из признаков сходимости, убедитесь в сходимости числового ряда

$$\frac{5}{6}+\frac{13}{36}+\frac{35}{216}+\ldots+\frac{2^n+3^n}{6^n}+\ldots$$

Найдите и запишите ее сумму.

Задание 3. Пользуясь одним из признаков сходимости, убедитесь в сходимости числового ряда

$$\frac{4}{4\times 5}+\frac{4}{5\times 6}+\frac{4}{6\times 7}+\ldots+\frac{4}{(n+3)(n+4)}+\ldots$$

Найдите и запишите ее сумму.

Задание 4. Пользуясь одним из признаков сходимости, убедитесь в сходимости числового ряда

$$\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\frac{1}{3\times 4}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}+\ldots$$

Найдите и запишите ее сумму.

Задание 5. Пользуясь одним из признаков сходимости, убедитесь в сходимости числового ряда

$$\frac{6}{1\times 4}+\frac{6}{4\times 7}+\ldots+\frac{6}{(3n-2)(3n+1)}+\ldots$$

Найдите и запишите ее сумму.

Задание 6. Найдите и запишите сумму числового ряда

$\frac{1}{2}+\frac{9}{36}+\frac{27}{216}+\ldots+\frac{3^n}{6^n}+\ldots$
+:1.0

Задание 7. Найдите и запишите сумму числового ряда

$$1+\frac{2}{3}+\frac{4}{9}+\ldots+\frac{2^n}{3^n}+\ldots.$$

Задание 8. Запишите последовательно номера всех сходящихся рядов из числа приведенных ниже:

1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+\cos 2n}{n^2}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{3n+3}$; 3) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n$.

Задание 9. Запишите последовательно номера всех сходящихся рядов из числа приведенных ниже:

1) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+\cos^2 n}{n^2}$; 3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{5n}$.

Задание 10. Запишите последовательно номера всех сходящихся рядов из числа приведенных ниже:

1) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{6}\right)^n$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+2}{3n+5}$; 3) 3)$\sum_{n=1}^{\infty}2^n$.

Задание 11. Запишите последовательно номера всех сходящихся рядов из числа приведенных ниже:

$$1)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n!};\ 2)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n}{3n+7};\ 3)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\sin n}{n^2}.$$

Задание 12. Запишите последовательно номера всех сходящихся рядов из числа приведенных ниже:

$$1)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^{2n}}{n!};\ 2)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos^3 n+7}{n^3};\ 3)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n}.$$

Задание 13. Запишите последовательно номера всех сходящихся рядов из числа приведенных ниже:

$$1)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n^5};\ 2)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n+2}{5n+3};\ 3)\ \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n.$$

Задание 14. Запишите последовательно номера всех сходящихся рядов из числа приведенных ниже:

$$1)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{arctg} n}{n^2};\ 2)\ \sum_{n=1}^{\infty}n\left(\sqrt{n^2+2}-n\right);\ 3)\ \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{5}{7}\right)^{2n}.$$

Задание 15. Запишите последовательно номера всех сходящихся рядов из числа приведенных ниже:

$$1)\ \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{n+1}\right)^2;\ 2)\ \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{5+n}{n^2}\right)^2;\ 3)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\cos\frac{1}{n}.$$

Задание 16. Запишите последовательно номера всех сходящихся рядов из числа приведенных ниже:

$$1)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+2}{n^4+2};\ 2)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n\sqrt{n}};\ 3)\ \sum_{n=1}^{\infty}2^n.$$

Задание 17. Запишите последовательно номера всех сходящихся рядов из числа приведенных ниже:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n+3}{4n-1}$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n+1}{n^2}$; 3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt[3]{n}}$.

Задание 18. Запишите последовательно номера всех сходящихся рядов из числа приведенных ниже:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^3 n+5}{n^2}$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{2^n}$; 3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{arctg} n}{2n}$.

Задание 19. Запишите последовательно номера всех сходящихся рядов из числа приведенных ниже:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{n^2+n}-n\right)$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{4-\sin 2n}{n^2}$; 3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1+2\sqrt{n}}{3n\sqrt{n}}$.

Задание 20. Запишите последовательно номера всех сходящихся рядов из числа приведенных ниже:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 3n}{n}$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{5^{2n}}{n!}$; 3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{n^4+3}-n^2\right)$.

Секция 2. Степенные ряды и приближенные вычисления значений функций и определенных интегралов

Задание 1. Сколько нужно взять членов ряда

$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots$, чтобы найти число e^{-1} с точностью до 0,01?

Задание 2. Сколько нужно взять членов ряда

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots,$$

Задание 2. Сколько нужно взять членов ряда

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots,$$

чтобы найти число $e^{-1/2}$ с точностью до 0,01?

Задание 3. Сколько нужно взять членов ряда

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \ldots,$$

чтобы найти число ln2 с точностью до 0,01?

Задание 4. Сколько нужно взять членов ряда

$$\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \ldots,$$

чтобы найти число sin0.5 с точностью до 0,01?

Задание 5. Сколько нужно взять членов ряда

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots,$$

чтобы найти число cos0.5 с точностью до 0,01?

Задание 6. Найдите радиус сходимости степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty} x^n$.

Задание 7. Найдите радиус сходимости степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n\cdot 2^n}$.

Задание 8. Найдите радиус сходимости степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n+1}\left(\frac{x}{2}\right)^n$.

Задание 9. Найдите радиус сходимости R степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty} 3^n x^n$. В ответе укажите значение $3R$.

Задание 10. Найдите радиус сходимости степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n x^n}{n}$.

Задание 11. Найдите радиус сходимости степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-3)^n}{n\cdot 5^n}$.

Задание 12. Найдите радиус сходимости степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^{2n}}{n\cdot 9^n}$.

Задание 13. Найдите радиус сходимости степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+3)^n}{n^2}$.

Задание 14. Найдите радиус сходимости степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-2)^n}{(2n-1)\cdot 2^n}$.

Задание 15. Найдите радиус сходимости степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-7)^n}{5n-1}$.

Задание 16. Найдите радиус сходимости степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2x-7)^n}{n+5}$.

Задание 17. Найдите радиус сходимости степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-5)^n}{2^{2n}}$.

Задание 18. Используя разложение функции e^x в ряд Маклорена, вычислите приближенно e^{-1} с точностью до $\Delta = 0.01$.

Задание 19. Используя разложение функции $\cos x$ в ряд Маклорена, вычислите приближенно $\cos 1$ с точностью до $\Delta = 0.01$.

Задание 20. Используя табличное разложение функции $(1+x)^{\alpha}$ в ряд Маклорена, вычислите приближенно $\sqrt{11}$ с точностью до $\Delta = 0.001$.

Задание 21. Используя табличное разложение функции $(1+x)^{\alpha}$ в ряд Маклорена, вычислите приближенно $\sqrt[3]{30}$ с точностью до $\Delta = 0.001$.

Задание 22. Используя табличное разложение функции $(1+x)^{\alpha}$ в ряд Маклорена, вычислите приближенно $\sqrt{84}$ с точностью до $\Delta = 0.001$.

Задание 23. Разложив подынтегральную функцию в ряд Маклорена, вычислите приближенно интеграл $\int\limits_0^1 e^{-x^2}dx$ с точностью до $\Delta = 0.0001$.

Задание 24. Разложив подынтегральную функцию в ряд Маклорена, вычислите приближенно интеграл $\int\limits_0^{0.5} \frac{dx}{1+x^4}$ с точностью до $\Delta = 0.001$.

Задание 25. Разложив подынтегральную функцию в ряд Маклорена, вычислите приближенно интеграл $\int\limits_0^{0.25} \ln(1+\sqrt{x})dx$ с точностью до $\Delta = 0.001$.

Правильные ответы к тестовым заданиям

Секция 1. Числовые ряды. Сумма ряда. Признаки сходимости.

Задание 1. 1.
Задание 2. 1.5.
Задание 3. 1.
Задание 4. 1.
Задание 5. 2.
Задание 6. 1.0.
Задание 7. 3.
Задание 8. 13.
Задание 9. 12.
Задание 10. 1.
Задание 11. 13.
Задание 12. 12.
Задание 13. 3.
Задание 14. 13.
Задание 15. 12.
Задание 16. 12.
Задание 17. 12.
Задание 18. 12.
Задание 19. 2.
Задание 20. 23.

Секция 2. Степенные ряды и приближенные вычисления значений функций и определенных интегралов.

Задание 1. 5.
Задание 2. 4.
Задание 3. 99.
Задание 4. 2.
Задание 5. 3.
Задание 6. 1.
Задание 7. 2.
Задание 8. 2.

Задание 9. 1.
Задание 10. 1.
Задание 11. 5.
Задание 12. 3.
Задание 13. 1.
Задание 14. 2.
Задание 15. 1.
Задание 16. 0.5.
Задание 17. 4.
Задание 18. 0.38.
Задание 19. 0.54.
Задание 20. 3.317.
Задание 21. 3.107.
Задание 22. 9.165.
Задание 23. 0.7468.
Задание 24. 0.494.
Задание 25. 0.071.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Кудрявцев Л.Д.* Краткий курс математического анализа. – Т. 1, 2. – М.: Физматлит, 2005.

2. *Виноградова И.А., Олехник С.Н., Садовничий В.А.* Математический анализ в задачах и упражнениях (числовые и функциональные ряды). – М.: Факториал Пресс, 1996.

3. *Кадымов В.А., Литвин О.Н.* Числовые и функциональные ряды. Приближенные вычисления с помощью рядов. Электронный учебник. [Электронный ресурс]. Режим доступа: sdo.mggeu.ru/pluginfile.pdp/2838/mod_resource/content.

Содержание

Учебное издание

Вагид Ахмедович **Кадымов**

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Часть 5

Числовые и функциональные ряды. Приближенные вычисления с помощью рядов

Учебно-методическое пособие

Печатается в авторской редакции.

Ответственный редактор	С.А. Бобко
Технический редактор	К.А. Антонов
Компьютерная верстка	К.А. Антонов

Подписано в печать 18.11.2019. Формат $60 \times 84\ ^{1}/_{16}$.
Бумага офисная. Гарнитура *Times New Roman*. Печ. лист 5.5.
Тираж 300 экз. Заказ № 35.

Московский государственный гуманитарно-экономический университет
107150, Москва, ул. Лосиноостровская, д. 49.
Отпечатано в типографии МГГЭУ по технологии CtP.